QÜESTIIÓ, Vol 12, no 1, pp. 3-19, 1988

ALGUNAS CARACTERÍSTICAS DE LOS MODELOS AGREGADOS MC–MN DE MODELOS MA.

ANDRÉS CARRIÓN GARCÍA.

Universidad Politécnica de Valencia.

Se estudian algunas propiedades de los modelos agregados de mínimos cuadrados y mínima norma de procesos MA. Dichos agregados MC–MN se obtienen mediante una metodología matricial desarrollada por el autor, que es aquí brevemente esbozada. Las características analizadas se refieren a la multiplicatividad de las estructuras componentes del modelo y la invertibilidad del modelo agregado.

1980 M.S.C. ..... 62M10 (Time series).

Some characteristics of the MN–LS aggregated models of MA process.

Keywords: Time series, Temporal aggregation, Forecasting, Generalized Inverse.

1. INTRODUCCIÓN

La agregación temporal de una serie cronológica consiste simplemente en la suma por grupos consecutivos disjuntos de longitud constante m de los elementos de la misma. Tal proceso es el que transforma datos horarios en diarios ($m = 24$), diarios en semanales ($m = 7$) o mensuales en anuales ($m = 12$), por ejemplo, tratándose de un proceso por tanto harto frecuente en la práctica económico–industrial.

En este proceso de agregación temporal, el modelo estocástico que sigue la serie considerada sufre ciertas modificaciones, tanto en lo que se refiere al orden de sus componentes autorregresivos y/o de medias móviles como en los valores

–Andrés Carrión García - Dep. de Estadística. E.T.S.I.I. - Universitat Politècnica de València.

–Article rebut al novembre del 1986.

de los parámetros presentes. El conocimiento de dichas modificaciones resulta interesante en varios aspectos relacionados con la práctica del análisis de series temporales, amén del interés intrínseco que puedan representar.

Un primer aspecto práctico de interés es la posibilidad de ahorro de tiempo de ordenador en la modelización de los agregados de series temporales de modelo ya conocido. En estos casos, en efecto, un conocimiento adecuado del modelo agregado hace tal proceso de modelización practicamente innecesario.

Esa evitación cobra especial interés al pensar en series desagregadas con un número de elementos tal que, aún pudiendo ser analizadas, sus agregados tienen ya tan pocos términos que es imposible modelizarlos por un procedimiento estandar (p.e. una serie mensual con 60 datos que da lugar a una serie anual de sólo 5 datos).

Cabe pensar también que lo que se hace al intentar definir el modelo agregado antes del proceso de agregación mismo, es evitar los efectos de la pérdida de información que acompaña a dicho proceso, si bien, como se comentará más adelante, es esa pérdida de información la que dará lugar al carácter aproximado del modelo MC–MN obtenido. En cualquier caso para su definición se hizo uso de toda la información del modelo original, y no sólo de la restante tras la agregación.

Una última vía de interés, dentro de esta breve introducción, viene dada por las posibilidades que el conocimiento de los efectos de la agregación tiene sobre el problema inverso al aquí tratado: la desagregación. Cabe plantearse que esta metodología pueda aportar luz en el desarrollo de métodos de desagregación eficientes, si bien este aspecto no ha sido objeto de estudio hasta el momento.

2. OBTENCIÓN DEL MODELO AGREGADO MC–MN DE UN MA(q)

Sea z_t una serie temporal que sigue un modelo MA(q):

$$z_t = (1 - \Theta_1 B - \dots - \Theta_q B^q) a_t = \Theta_q(B) a_t$$

donde $\Theta_q(B)$ es un polinomio en B de orden q que incluye todos los efectos de medias móviles presentes en la serie (tanto regulares como estacionales), pudiendo pues ser el resultado de multiplicar varios polinomios en B distintos.

La representación de esa serie para todos los instantes da lugar a

$$\begin{aligned}
z_t &= a_t - \Theta_1 a_{t-1} - \dots - \Theta_q a_{t-q} \\
z_{t-1} &= a_{t-1} - \Theta_1 a_{t-2} - \dots - \Theta_q a_{t-q-1} \\
&\dots \\
z_{t-n} &= a_{t-n} - \Theta_1 a_{t-n-1} - \dots - \Theta_q a_{t-q-n}
\end{aligned}$$

que admite una notación matricial de la forma $z = \Theta.a(1)$, donde

$$z' = (z_t z_{t-1} \ldots z_1)$$
$$a' = (a_t a_{t-1} \ldots a_1)$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} 1 & -\Theta_1 & \ldots & -\Theta_q & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & -\Theta_1 & \ldots & -\Theta_q & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 & -\Theta_1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

siendo según se ve Θ la matriz de coeficientes del modelo.

El proceso de agregación de una realización parcial de un proceso estocástico discreto cualquiera $x_{t'}$ puede representarse matricialmente como la premultiplicación del vector formado por los términos de dicho proceso, $x = (x_t \ldots x_1)$, por una matriz de agregación G que tenga una forma adecuada.

Así, si definimos tal matriz G como:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & (m) & 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & (m) & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 1 & (m) & 1 \end{pmatrix}$$

es sencillo comprobar que $Gx = x^A$, donde x^A es el vector de los agregados con período m de x_t.

Si multiplicamos la expresión (1) por esta matriz G se tiene:

$$Gz = G\Theta a$$

El primer término de esta igualdad es precisamente el vector de la serie agregada, z^A, pero el segundo no constituye ninguna forma reconocible. Para que lo fuera, bastaría hallar una matriz T tal que:

$$G\Theta = TG \tag{2}$$

con lo que

$$z^A = TGa = Ta_1^A \quad ; \quad a_1^A = Ga$$

que sería ya el modelo de la serie agregada.

Desgraciadamente el sistema de ecuaciones (2) es incompatible y hay que buscar una solución aproximada. A tal fin se emplea la inversa generalizada de Moore–Penrose, obteniéndose la solución, T, de mínimos cuadrados y mínima norma:

$$T = G\Theta G^{+} \quad ; \quad G^{+} = \text{ inversa de Moore–Penrose de } G$$

La forma de esta matriz T es:

$$T = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & \dots & \dots & t_{qA} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & t_0 & t_1 & \dots & \dots & t_{qA} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & t_0 & t_1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & t_0 \end{pmatrix}$$

con

$q^A = \{q/m\}(\{x\} = \text{ menor entero que iguala o mayora a } x)$

$$\begin{aligned} t_0 &= (m - (m-1)\Theta_1 - (m-2)\Theta_2 - \dots - \Theta_{m-1})/m \\ t_1 &= (-\Theta_1 - 2\Theta_2 - \dots - m\Theta_m - (m-1)\Theta_{m+1} - \dots - \Theta_{2m-1})/m \\ &\dots \\ t_n &= (-\Theta_{(n-1)m+1} - \dots - m\Theta_{nm} - \dots - \Theta_{(n+1)m-1})/m \end{aligned}$$

Si de la matriz T se saca como factor común el elemento de su diagonal principal, t_0, y se hacen además los convenientes ajustes de modo que se respete el habitual criterio de signos de los modelos de medias móviles, resulta:

$$z^A = \Theta^A a^A \quad ; \quad a^A = t_0 a_1^A$$

en la que, según se acaba de comentar, Θ_A es tal que:

$$(3) \qquad \Theta_n^A = \frac{\Theta_{(n-1)m+1} + \dots + m\Theta_{nm} + \dots + \Theta_{(n+1)m-1}}{m - (m-1)\Theta_1 - \dots - \Theta_{m-1}}$$

es decir que $\Theta^A = (1/t_0)T$ con $\Theta_n^A = -t_n/t_0$

Con ello el modelo agregado de un MA(q) resulta ser una nuevo MA(q^A) y sus parámetros son los de la expresión (3).

Tal resultado es coincidente en lo relativo al orden del modelo agregado con el presentado por Wei (1978) y va un paso más allá, en el sentido de que incluye por primera vez expresiones para los parámetros del modelo agregado.

3. MANTENIMIENTO DE LA MULTIPLICATIVIDAD

3.1. La multiplicatividad

En la bibliografía sobre series temporales, se llama modelo multiplicativo a aquel cuya expresión incluye el producto de dos o más polinomios en el operador retardo B, afectando a un mismo elemento estocástico, sea éste la serie temporal o el ruido blanco.

Se llamará aquí multiplicatividad a esta condición que traduce a expresiones algebraicas una cierta independencia en los efectos. Tal independencia se pone de manifiesto al pensar en series cortas con una parte estacional de periodo largo, en las que esta estructura estacional puede no captarse en absoluto, estando en cambio bien definida la regular.

Ejemplo típico de multiplicatividad en la estructura lo dan los ya citados modelos con parte regular y estacional:

$$z_t = (1 - \Theta_1 B - ... - \Theta_q B^q)(1 - \Theta_s B^s - ... - \Theta_{Qs} B^{Qs})a_t \tag{4}$$

El objeto aquí perseguido es estudiar el mantenimiento de la multiplicatividad a través del proceso de agregación.

3.2. Mantenimiento de la multiplicatividad del modelo agregado

La primera cuestión que se plantea es el tratar de encontrar condiciones o propiedades que nos permitan discriminar sobre si la multiplicatividad se va a mantener o no en la agregación.

Considérense aquellos modelos que puestos en forma aditiva son un MA(q):

$$z_t = (1 - \Theta_1 B - \Theta_2 B^2 - ... - \Theta_q B^q)a_t \tag{5}$$

Este polinomio en B puede descomponerse en el producto de otros polinomios de menor grado, quedando de la forma:

$$z_t = (1 - A_{11} B - ... - A_{1q_1} B^{q_1}) \cdots (1 - ... - A_{jq_j} B^{q_j})\, a_t \tag{6}$$

cumpliéndose que:

$$q = \sum_{i=1}^{j} q_i$$

A la expresión 6 le llamaremos expresión multiplicativa del modelo frenta a la 5 que es la forma aditiva del mismo.

Diremos que un modelo se agrega en su forma multiplicativa cuando realizamos la agregación por separado de cada uno de los factores que componen su estructura, frente a la agregación de la forma aditiva en la que se efectua la agregación directamente sobre esa expresión desarrollada (aditiva) del modelo.

Una cuestión que se va a plantear es cúando se mantendrá la estructura multiplicativa del modelo a través del proceso de agregación. O lo que es lo mismo, bajo qué condiciones resulta indiferente agregar un modelo en su forma aditiva o multiplicativa, conduciendo ambas al mismo resultado.

Teorema:

Es condición necesaria pero no suficiente para que se mantenga la multiplicatividad que se verifique

$$\{q/m\} = \sum_{i=1}^{j} \{q_i/m\} \tag{7}$$

donde

$q=$ orden del modelo en forma aditiva.

$q_i=$ orden de cada uno de los j factores del modelo en su forma multiplicativa.

Demostración:

En cuanto a la necesidad, basta percatarse de que cada uno de los dos miembros de la igualdad 7 son, respectivamente, el de la izquierda el orden del modelo agregado resultante de agregar la forma aditiva del modelo original, y el de la derecha en orden del modelo agregado resultante de multiplicar las agregaciones de cada uno de los factores de la forma multiplicativa del modelo. Evidentemente, para que ambos modelos agregados coincidan es necesario que sus órdenes sean iguales.

Nótese también que tal razonamiento no hace referencia al valor de los parámetros de ambos modelos agregados, cuya no coincidencia en algunos casos provoca la no suficiencia de la condición expuesta. En efecto, piénsese en un modelo como el siguiente. Sea un MA(3) de la forma:

$$z_t = (1 - (\Theta_1 + A)B - (\Theta_2 - \Theta_1 A)B^2 + \Theta_2 AB^3)a_t$$

que se pueda factorizar de la forma:

$$z_t = (1 - \Theta_1 B - \Theta_2 B^2)(1 - AB)a_t$$

Se cumple además que, con periodo de agregación $m = 2$:

$$\{3/2\} = \{2/2\} + \{1/2\} = 2$$

Veremos que, sin embargo, no se mantiene la multiplicatividad. La agregación del modelo original conduce a un MA(2) de la forma:

$$(8) \qquad z_t^A = 1 - \frac{(\Theta_1 + A) + 2(\Theta_2 - \Theta_1 A) - \Theta_2 A}{2 - (\Theta_1 + A)} B - \frac{-\Theta_2^A}{2 - (\Theta_1 + A)} B^2$$

La agregación del modelo factorizado conduce a los siguientes factores agregados:

* **Factor MA(1) procedente del MA(2) desagregado:**

$$1 - \frac{\Theta_1 + 2\Theta_2}{2 - \Theta_1} B$$

* **Factor MA (1) resultado de agregar el MA(1):**

$$1 - \frac{A}{2 - A} B$$

Si se multiplican ambos factores para obtener el modelo agregado en notación aditiva, se obtiene:

$$(9) \qquad 1 - \left(\frac{\Theta_1 + 2\Theta_2}{2 - \Theta_1} + \frac{A}{2 - A} \right) B - \left(-\frac{\Theta_1 + 2\Theta_2}{2 - \Theta_1} \frac{A}{2 - A} \right) B^2$$

los polinomios de las expresiones 8 y 9 deberían ser idénticos si se conservara la multiplicatividad. Es en cambio sencillo comprobar que los coeficentes de los términos de igual grado no coinciden, quedando pues probada la no suficiencia.

Si se considera un modelo MA$(q)(Q)_s$, tal como el de la expresión 4, con la condición de que el periodo estacional sea múltiplo del de agregación, $s = km$, sometido a un proceso de agregación, veamos si el modelo agregado verifica el comentado mantenimiento de la multiplicatividad, es decir si el resultado de agregar el modelo como un MA$(q)(Q)_s$ es el mismo que el de agregarlo en su forma aditiva, como un MA$(q + QS)$.

En el apartado primero de este trabajo, se realizó la agregación de los modelos mixtos regular–estacional a base de transformarlos a su notación aditiva. La otra alternativa aquí planteada es la posibilidad de obtener el mismo resultado agregando por un lado la parte regular, por otro la estacional, y al final multiplicando los resultados de estas dos agregaciones.

En primer lugar se comprueba el cumplimiento de la condición 8, antes expuesta:

$$\left\{\frac{q+km}{m}\right\} = \left\{\frac{q}{m}\right\} + k = \left\{\frac{q}{m}\right\} + \frac{km}{m} \qquad k \in N$$

Luego, en principio, resulta posible el mantenimiento de la multiplicatividad.

La resolución del caso general plantea numerosos problemas de cálculo, por la naturaleza de las expresiones en juego. A título de ejemplo, veremos uno de los casos más frecuentes.

* **Modelos MA(1)(1)$_{km}$**

La expresión del modelo es:

$$z_t = (1 - \Theta_1 B)\left(1 - \Theta_{km} B^{km}\right) a_t$$

que puesto en forma aditiva queda:

$$z_t \left(1 - \Theta_1 B - \Theta_{km} B^{km} + \Theta_1 \Theta_{km} B^{km+1}\right) a_t$$

Con ello al agregar con periodo m, resultará un modelo MA$(k + 1)$ de parámetros, en el caso de que $k \geq 2$:

$$\Theta_1^A = \frac{\Theta_1}{m-(m-1)\Theta_1} \qquad \Theta_k^A = \frac{m\Theta_{km} - (m-1)\Theta_1\Theta_{km}}{m-(m-1)\Theta_1}$$

$$\Theta_{k+1}^A = \frac{-\Theta_1\Theta_{km}}{m-(m-1)\Theta_1} \qquad \Theta_i^A = 0 \quad \forall i <> 1, k, k+1$$

Si fuera $k = 1$, las expresiones anteriores quedarían:

$$\Theta_1^A = \frac{\Theta_1 + m\Theta_{km} - (m-1)\Theta_1\Theta_{km}}{m-(m-1)\Theta_1} \qquad \Theta_2^A = \frac{-\Theta_1\Theta_{km}}{m-(m-1)\Theta_1}$$

$$\Theta_i^A = 0 \qquad \forall i > 2$$

Trabajaremos en el supuesto más general de que k es mayor o igual que dos. Con ello, si se hubieran agregado por separado las partes regular y estacional se tendría:

- De la agregación del MA(1) un nuevo MA(1) del parámetro

$$\Theta_1^{A'} = \frac{\Theta_1}{m-(m-1)\Theta_1}$$

- de la agregación del $\text{MA}(1)_{km}$ un $\text{MA}(1)_k$ del parámetro

$$\Theta_k^{A'} = \Theta_{km}$$

Multiplicando ambos, el modelo agregado quedaría:

$$z_t^A = \left(1 - \Theta_1^{A'}B\right)\left(1 - \Theta_k^{A'}B^k\right)a_t^A$$

Efectuando el producto resulta:

$$z_t^A = \left(1 - \Theta_1^{A'}B - \Theta_k^{A'}B^k - \Theta_1^{A'}\Theta_k^{A'}B^{k+1}\right)a_t^A$$

Si comparamos estos resultados con los de la agregación del modelo en forma aditiva, resulta clara la igualdad entre ellos. En efecto:

$$\Theta_1^A = \Theta_1^{A'} = \frac{\Theta_1}{m-(m-1)\Theta_1} \qquad \Theta_k^A = \Theta_k^{A'} = \Theta_{km}$$

$$\Theta_{k+1}^A = \Theta_{k+1}^{A'} = \frac{-\Theta_1\Theta_{km}}{m-(m-1)\Theta_1}$$

Es inmediato comprobar que en el caso $k = 1$ también se cumple esta igualdad.

Tal equivalencia entre las dos distintas formas de agregar un modelo con parte regular y estacional de periodo múltiplo del de agregación, puede comprobarse para otros modelos distintos al aquí analizado, incluso para aquellos cuya expresión multiplicativa contenga más de dos factores, por ejemplo cuando se presente una doble estacionalidad.

Ello nos permite enunciar la siguiente Proposición:

En la agregación de modelos MA con partes regular y estacionales, de periodos estacionales múltiplos del de agregación, es equivalente obtener el modelo agregado MCMN a partir del modelo MA original puesto en forma aditiva o a partir del producto de la agregación independiente de todos y cada uno de los factores (partes regular y estacionales) del MA original.

Este fenómeno del mantenimiento de la multiplicatividad tiene algunas interesantes consecuencias de tipo práctico. Considérese una serie que presente estacionalidad de periodo muy largo que, aunque indudablemente presente en su comportamiento, no nos es posible modelizar por problemas exclusivamente prácticos (alto orden de diferenciación necesario, elevado número de coeficientes de correlación requeridos, etc.) Sin embargo, si esa serie se somete a un proceso de agregación de periodo submúltiplo de esa estacionalidad, se reduce el orden de la misma hasta unos niveles en los que resulte más cómodo el trabajo de análisis e identificación del modelo de la serie. Una vez identificada adecuadamente esa estacionalidad de periodo largo, puede incorporársela al modelo desagregado de la serie sin más que modificar el orden de los exponentes del operador retardo B.

4. INVERTIBILIDAD DEL MODELO AGREGADO

La invertibilidad del modelo agregado considerado aisladamente va a seguir exactamente las reglas generales, requiriéndose para que un modelo sea invertible que las raices reales de su polinomio de medias móviles estén todas fuera del círculo unidad del plano complejo.

La cuestión que aquí se va a abordar no es esa, sino que es la relación existente entre la invertibilidad del modelo desagregado y la de su correspondiente agregado.

Al igual que en Box y Jenkins (1.976), no es posible estudiar la cuestión de la invertibilidad en el caso geneal, debiendo tratarse por separado cada uno de los modelos más simples y extrayéndose de ellos algunas conclusiones más generales.

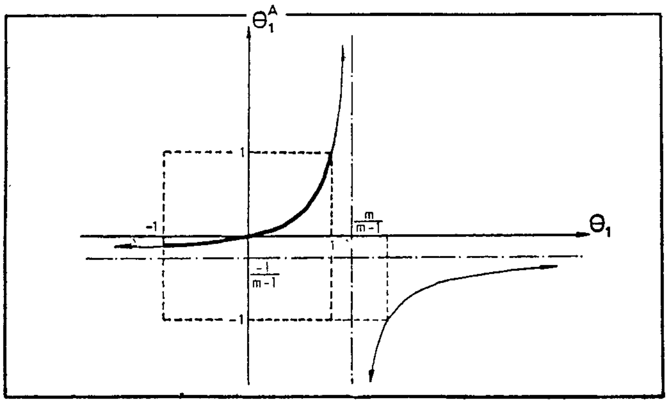
* Caso MA(1) desagregado:

El modelo resultante de su agregación con periodo m será otro MA(1) de parámetro

$$\Theta_1^A = \frac{\Theta_1}{m-(m-1)\Theta_1} \tag{10}$$

y la zona de invertibilidad del desagregado es $\Theta_1 \in]-1,1[$

Si representamos gráficamente la relación entre Θ_1 y Θ_1^A se tiene:



donde vemos que a los valores de $\Theta_1 \in]-1,1[$ les corresponden valores de $\Theta_1^A \in]-1,1[$, es decir, que los modelos que eran invertibles en el nivel desagregado seguirán siéndolo en el agregado. Pero además, hay también otro conjunto de parámetros Θ_1 cuya imagen también es, en módulo, menor que la unidad, en concreto aquellos que cumplan:

$$(11) \qquad \Theta_1 \in]-\infty,-1[\quad \text{o bien} \quad \Theta_1 \in](m/(m-2),\infty[$$

existiendo así pues un grupo de modelos que se "invertibilizan" en el proceso de agregación.

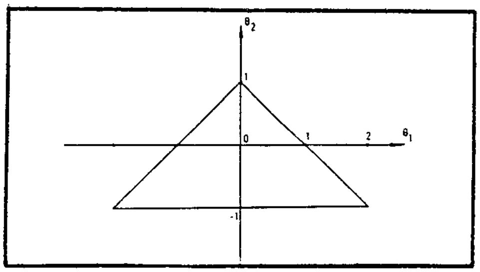
Más aún, la zona en la que el modelo agregado de un MA(1) no invertible conserva tal característica, que corresponde a los modelos de parámetro $\Theta_1 \in]1, m/(m-2)[$, tiene una amplitud que se reduce al aumentar el periodo de agregación m.

*** Caso MA(2) desagregado:**

La agregación de un tal modelo con periodo $m \geq 2$ conduce a un MA(1) de parámetro

$$(12) \qquad \Theta_1^A = \frac{\Theta_1 + 2\Theta_2}{m-(m-1)\Theta_1-(m-2)\Theta_2}$$

La condición que debía cumplir el MA(2) original para ser invertible era que los dos parámetros Θ_1 y Θ_2 estuvieran dentro del triángulo de la figura:



En cambio la condición de invertibilidad del MA(1) agregado es sólo que $|\Theta_1^A| < 1$. Analicemos cuándo Θ_1^A produce no invertibilidad:

a) $\Theta_1^A \geq 1$.

Según cual sea el signo del denominador de la expresión (12), se delimitan dos zonas de no invertibilidad:

(13) $$\Theta_2 q \geq 1 - \Theta_1 \quad \text{(denominador positivo)}$$

(14) $$\Theta_2 \leq 1 - \Theta_1 \quad \text{(denominador negativo)}$$

El signo del denominador (D) sigue la siguiente pauta:

(15) $$D > 0 \quad \text{si} \quad \Theta_2 m/(m-2) - (m-1)\Theta_1/(m-2)$$

(16) $$D < 0 \quad \text{si} \quad \Theta_2 > m/(m-2) - (m-1)\Theta_1/(m-2)$$

Es decir, cuando se cumplan simultáneamente las expresiones (13) y (15) o las (14) y (16) el modelo agregado será no invertible ($|\Theta_1^A| \geq 1$).

b) $\Theta_1^A \leq -1$.

Operando de un modo similar al anterior tenemos que las expresiones que delimitan las zonas de no invertibilidad son:

(17) $$\Theta_2 \geq m/(m-4) - (m-2)\Theta_1/(m-4) \quad \text{(denom. positivo)}$$

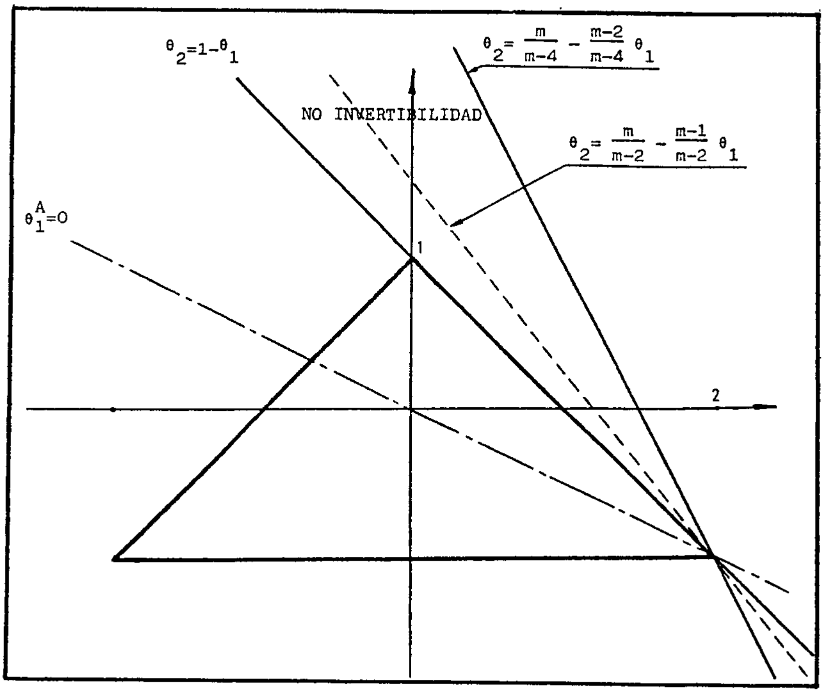
(18) $$\Theta_2 \leq m/(m-4) - (m-2)\Theta_1/(m-4) \quad \text{(denom. negativo)}$$

Así pues, cuando se den simultáneamente (15) y (17) o (16) y (18) el modelo será no invertible.

Si el periodo de agregación m es menor que 4, las expresiones (17) y (18) deben ser sustituidas por

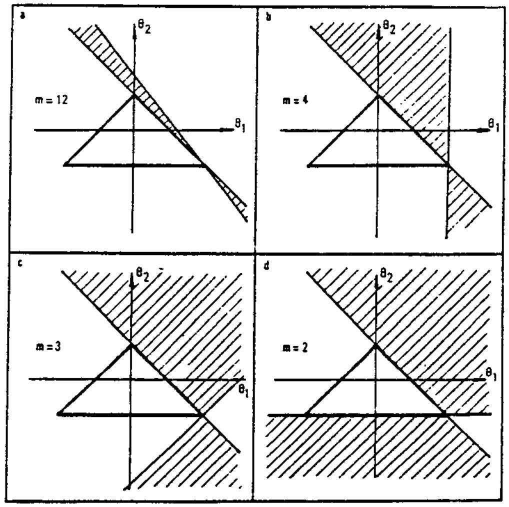
$$\Theta_2 < m/(m-4) - (m-2)\Theta_1/(m-4) \quad \text{(denom. positivo)}$$
$$\Theta_2 > m/(m-4) - (m-2)\Theta_1/(m-4) \quad \text{(denom. negativo)}$$

Como plasmación gráfica de lo anterior resulta la figura siguiente, en la que se superponen las zonas de invertibilidad de los modelos agregado y desagregado:



Como se ve, ocurren hechos similares a los descritos en el modelo MA(1), puesto que, de un lado, todos los modelos que eran invertibles (zona interior del triángulo) siguen siéndolo al agregarlos; de otro lado amplias zonas de modelos desagregados no invertibles (zona exterior al triángulo no rayada) pasan a serlo tras la agregación y, por último, que el conjunto de modelos que mantienen la no invertibilidad (zona rayada) reduce su amplitud al aumentar el periodo de agregación m.

Veamos algunos ejemplos de cómo evoluciona esa zona de no invertibilidad para distintos órdenes de agregación:



* **Caso MA(1)$_{km}$ desagregado:**

El modelo resultante de la agregación es ahora un MA$(1)_k$, con $\Theta_k^A = \Theta_{km}$, con lo que todos los modelos desagregados invertibles y sólo ellos serán invertibles en el nivel agregado.

* **Caso MA(Q)$_{km}$ desagregado:**

Lo dicho para el MA$(1)_{km}$ es válido también aquí, cumpliéndose que $\Theta_{ik}^A = \Theta_{ikm} i = 1, ...Q$, como es sencillo comprobar.

* **Caso MA(1)$_{m/k}$ desagregado:**

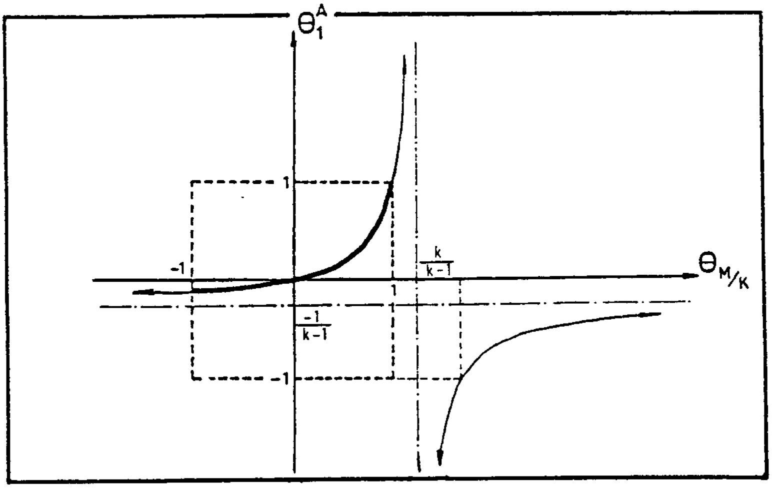
El modelo resultante es ahora un MA de orden y parámetro:

$$q^A = \{(m/k)/m\} = \{1/k\} = 1$$

$$\Theta_1^A = \frac{\Theta_{m/k}}{(k - (k-1)\Theta_{m/k})}$$

Si se observa esta expresión es idéntica a la que se obtendría al agregar un MA(1) con periodo m, sin más que identificar Θ_1 con $\Theta_{m/k}$ y m con k. Las conclusiones serán las mismas que allí se expusieron:

- Todo modelo invertible sigue siéndolo al agregar.
- Los modelos con $\Theta_{m/k} \in]-\infty, 1[$ o con $\Theta_{m/k} \in]k/(k-2), \infty[$ pasan a ser invertibles.
- La zona de no invertibilidad se reduce al aumentar k



$*$ **Caso MA(1)(1)$_{km}$ desagregado:**

En general la agregación de este modelo conducirá a un MA($k+1$) de parámetros:

$$\Theta_1^A = \frac{\Theta_1}{m-(m-1)\Theta_1} \qquad \Theta_k^A = \Theta_{km} \qquad \Theta_{k+1}^A = \frac{-\Theta_1\Theta_{km}}{m-(m-1)\Theta_1}$$

o bien, haciendo uso del mantenimiento de la multiplicatividad, a un MA(1)(1)$_k$ con:

$$\Theta_1^A = \frac{\Theta_1}{m-(m-1)\Theta_1}$$

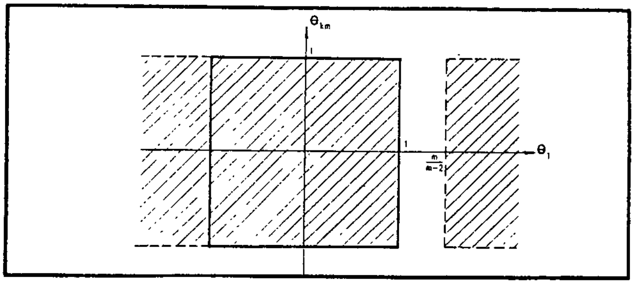
$$\Theta_k^A = \Theta_{km}$$

pudiéndose estudiar por separado la invertibilidad de cada una de las dos componentes, regular y estacional, ambas ya comentadas. Así pues, el modelo agregado será invertible si se cumplen simultáneamente las condiciones a) y b):

a) $\Theta_1 > m/(m-2)$ o $\Theta_1 < 1$

b) $\Theta_{km} \in]-1,1[$

lo cual se traduce gráficamente en:



siendo invertibles todos los modelos cuyos parámetros desagregados correspondan al área rayada.

* Condiciones de invertibilidad.

Si bien, según se ha visto, resulta imposible el estudio del caso general (MA(q) desagregado, $\forall q$) por problemas de tipo estrictamente práctico, ante la complejidad creciente de las expresiones involucradas y el aumento de dimensiones de los espacios en los que se debe trabajar, si que se puede, a través de los modelos aquí resueltos, extraer una serie de líneas generales que se van a cumplir en todos los casos.

En primer lugar se observa que toda serie que era invertible desagregada seguirá siéndolo al someterse a un proceso de agregación temporal.

Hay además grupos de modelos tales que las series desagregadas que los seguían no eran invertibles y en cambio sus agregados sí que lo son: la delimitación de tales grupos resulta diferente para cada modelo, si bien al aumentar la complejidad de los mismos, el caso particular correspondiente a los modelos más sencillos, da el mismo resultado que el que se obtenía analizando esos modelos sencillos directamente.

Hay, para cada orden MA, un grupo de modelos que permanecen no invertibles con la agregación. Se puede observar en todos los casos que, según aumenta el orden de agregación m, la extensión de tal grupo va reduciéndose hasta casi desaparecer.

5. BIBLIOGRAFÍA

[1] **Amemiya, T.** and **Wu, R.Y.** (1972) "The effect of agregation on prediction in the autoregresive model." J.A.S.A. 399, 628-632.

[2] **Box, G.E.P.; Jenjins, G.M.** (1976). "Time Series Analysisis, Forecasting and Control." Holden Day. San Francisco.

[3] **Brewer, K.R.W.** (1973). "Some consecuences of temporal aggregation and systematic sampling for ARMA and ARMAX models." Journal of Econometrics 1, 133-154.

[4] **Carrión, A.** (1985). "La agregación temporal de procesos estocásticos discretos de medias móviles". Tesis Doctoral. E.T.S.I.I. Universidad Politécnica de Valencia (inédito).

[5] **Carrión, A.; Llopis, M. y Pérez, M.** (1984). "Sobre la agregación temporal de series cronológicas". Actas del XIV Congreso Nacional de Estadística, I.O. e Informática." Granada, 883-887.

[6] **Rao, C.R.** and Mitra, R. (1971). "Generalized inverse of matrices and its applications." Wiley.

[7] **Stram, D.; Wei, W.S.** (1981). "Change of model form under temporal aggregation in the ARIMA process." Proc. Bu. Ec. Stat. Section ASA, Detroit, 313-317.

[8] **Wei,W.S.** (1978) "The effect of temporal agregation on parameter estimation distributed lag model." Journal of Econometrics 8, 237-246.

[9] **Wei, W.S.** (1978) "Some consecuences of temporal aggregation on seasonal time series." Ed. A. Zellner, 433-444.