QÜESTIIÓ, Vol 12, nº 3, pp. 333-345, 1988

UNA MEDIDA MATRICIAL PARA LA COMPARACIÓN DE EXPERIMENTOS CENSURADOS

AGUSTÍN TURRERO NOGUÉS

Universidad Complutense de Madrid

En este trabajo se desarrolla un método de comparación de experimentos con datos censurados. Dicho método se basa en la evaluación de la pérdida de información que se produce en estudios de supervivencia y fiabilidad cuando los tiempos de vida se censuran aleatoriamente por la derecha. Se supone que la distribución del tiempo de vida depende de un parámetro k-variante desconocido θ; y se usa la matriz de Fisher como medida de información apropiada acerca de θ. Se propone una medida matricial de la pérdida de información mediante la generalización de la medida real correspondiente, y se examinan sus propiedades. Se definen medidas reales de la pérdida de información a través de funcionales adecuados de los autovalores de dicha medida matricial.

Clasificación A.M.S: 62B10, 62B15, 65F15.

A Matrix measure for comparison of censored experiments.

Keywords: Fisher's information matrix, censored data, relative eficiency, eigenvalues.

1. INTRODUCCIÓN

Debido a los métodos de muestreo y a factores que escapan del control experimental, las medidas de los tiempos de vida de las unidades muestrales pueden ser censuradas. Por ejemplo, en estudios de fiabilidad sobre la duración de una determinada componente, no será útil esperar a la destrucción de la misma. En

—Agustín Turrero Nogués - Facultat de Matemàtiques - Universitat Complutense - Dept. d'Estadística i I.O. - Ciutat Univ. - 28040 Madrid.
—Article rebut el setembre de 1988.

supervivencia algunos pacientes pueden sobrevivir al final del ensayo clínico, o pasar a otro tratamiento, o morir por otra causa ajena a la enfermedad en estudio, produciéndose en cualquier caso una observación incompleta para algunas unidades muestrales, admitiendo que dichas unidades están censuradas. El modelo de censura aleatoria por la derecha (c.a.d.) es el más frecuente en biometría y consiste formalmente en lo siguiente. Sea T la variable aleatoria no negativa que denota el tiempo de vida. En presencia de censura, lo que realmente observa el estadístico para cada unidad muestral es la variable aleatoria bidimensional (X,δ) definida por $X=\min(T,C)$ y $\delta = I_{[T\leq C]}$, siendo C la variable aleatoria de censura, independiente de T e $I_{[A]}$ la función indicador del conjunto A, es decir:

$$(1.1) \qquad X = \begin{cases} T & \text{si} \quad T \leq C \\ C & \text{si} \quad T \geq C \end{cases} \qquad \delta = \begin{cases} 0 & \text{si la observación se censura} \\ 1 & \text{si la observación no se censura} \end{cases}$$

Típicamente, el objetivo del análisis de supervivencia es hacer inferencias acerca de los parámetros desconocidos de la distribución de T, cuando ésta pertenece a una familia paramétrica, o bien acerca de algún funcional de su función de distribución, si el modelo para dicha variable es no paramétrico. Supongamos que el estadístico puede elegir entre varias variables de censura o lo que es lo mismo, entre varios experimentos censurados en los que observa (X,δ) para diferentes variables C. Un método natural para elegir el más apropiado sería comparar la información estadística contenida en dichos experimentos y elegir el de mayor información. Ahora bien, como es conocido, no hay una única medida de la información estadística contenida en un experimento.

Hollander, Proschan y Sconing (1985a, 1985b) consideran este problema para modelos c.a.d., en general no paramétricos, y sugieren que las medidas de información elegidas cumplan dos requisitos intuitivos:

i) Si $C_1 \overset{st}{\leq} C_2$ (la variable de censura C_1 es estocásticamente menor que la C_2) la información en (X_1,δ_1) es más pequeña que la información en (X_2,δ_2) para todo T, siendo

$$X_i = \min\,(T,C_i) \qquad \text{y} \qquad \delta_i = I_{[T\leq C_i]} \quad i=1,2$$

ii) Para todo T y C la información en T es más grande que la información en (X,δ)*.

Estos autores consideran que una medida de información que no verifique i) y ii) es inadecuada. Goel (1987) proporciona, para modelos paramétricos, un

*La condición ii) es una consecuencia de la i) tomando $C_2=\infty$ con lo que T y X_2 tienen la misma distribución resultado que establece el hecho de que las condiciones i) y ii) deben darse para toda medida de información:

Dados los experimentos c.a.d. $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ basados en las variables aleatorias (T, C_1) y (T, C_2) respectivamente, tales que $C_1 \overset{st}{\leq} C_2$, entonces el experimento $\mathcal{E}_2$ es suficiente para el experimento $\mathcal{E}_1$ según la definición de Blackwell (Blackwell (1951) y (1953)).

El fenómeno de la pérdida de información debida a la censura ha sido estudiado entre otros por Brooks (1982), Barlow y Hsiung (1983), Hollander, Proschan y Sconing (1985a) (1985b) y Goel (1987). Nuestro interés se centra en evaluar esta pérdida de información para modelos c.a.d., cuando la distribución de la variable T depende de un parámetro k- variante y la medida de información adecuada es la matriz de Fisher. La valides de esta medida de información, en lo que a las condiciones i) y ii) anteriores se refiere, queda de manifiesto en la relación (3.3) de la sección 3.

El método que proponemos tiene como punto de partida las medidas reales de la pérdida de información utilizadas por Brooks (1982) en un contexto Bayesiano (sección 2) y consiste en definir una medida matricial de dicha pérdida de información (sección 3) que justificamos de manera formal por las propiedades de sus autovalores y de manera intuitiva por el claro significado de dichos autovalores al diagonalizar la matriz de Fisher mediante una reparamentrización biyectiva del parámetro de interés. Proponemos asimismo (sección 4) diferentes medidas reales de la pérdida de información, que definimos mediante funciones reales adecuadas de la matriz anterior y en particular de sus autovalores, heredando de esta forma las buenas propiedades de éstos, destacando la propiedad de invariancia para reparametrizaciones biyectivas diferenciables del parámetro.

2. NOTACIÓN Y ANTECEDENTES

Supongamos que la distribución del tiempo de vida T depende de un parámetro desconocido $\theta \varepsilon \Theta$ en el cual estamos interesados. En presencia de censura, la información disponible acerca de θ está contenida en la distribución de la variable X definida en (1.1). Sean $\mathcal{E}_o$ y $\mathcal{E}_c$ los experimentos no censurado y censurado respectivamente que consisten en una observación de las variables aleatorias T y X. Denotaremos por $\mathcal{E}_o^{(n)}$ y $\mathcal{E}_c^{(n)}$ a los experimentos que consisten en la observación de n réplicas independientes de $\mathcal{E}_o$ y $\mathcal{E}_c$ respectivamente. $I_o(\theta)$ e $I_c(\theta)$ denotarán una medida de información, acerca de θ, proporcionada por $\mathcal{E}_o$ y $\mathcal{E}_c$ rspectivamente y análogamente $I_{n,o}(\theta)$ e $I_{n,c}(\theta)$ para los experimentos $\mathcal{E}_o^{(n)}$ y $\mathcal{E}_c^{(n)}$. Brooks (1982) sugiere dos caminos para evaluar la pérdida de información que se produce al observar $\mathcal{E}_c$ en lugar de $\mathcal{E}_o$:

a) La pérdida relativa de información que se produce usando $\mathcal{E}_c^{(n)}$ en vez de $\mathcal{E}_o^{(n)}$ definida por:

$$L_{n,c} = \frac{I_{n,o}(\theta) - I_{n,c}(\theta)}{I_{n,o}(\theta)} \tag{2.1}$$

b) La eficiencia relativa de $\mathcal{E}_c^{(n)}$ comparado con $\mathcal{E}_o^{(n)}$ para hacer inferencias sobre θ, definida por:

$$R_{n,c} = \frac{n^*}{n} \tag{2.2}$$

donde n es el tamaño muestral de $\mathcal{E}_c^{(n)}$ y n^* es el tamaño muestral interpolado de $\mathcal{E}_o^{(n^*)}$ que se requiere para $I_{n^*,o}(\theta) = I_{n,c}(\theta)$.

Brooks (1982) utiliza ambos caminos en un contexto Bayesiano,cuando T se distribuye exponencialmente, la variable de censura C es de tipo I o tipo II (ver Miller (1981)) y eligiendo como medida de información la medida descrita por Lindley (1956).

3. MATRIZ DE EFICIENCIAS R_c

Desde una perspectiva clásica las definiciones anteriores requieren alguna modificación al ser funciones del parámetro las medidas de información usuales; además no cubren el caso en que θ es k-variante al ser ahora la matriz de Fisher la medida de información adecuada. Nuestro objetivo será llenar este hueco.

Como primera aproximación al problema pensemos en la situación univariante $\theta \varepsilon \Theta \subset \mathbf{R}$, con la medida real de Fisher como medida de información. La aditividad de esta medida para observaciones independientes hace que (2.2) sea ahora:

$$R_{n,c}(\theta) = \frac{n^*(\theta)}{n} = \frac{I_c(\theta)}{I_o(\theta)} = R_c(\theta) \quad \text{para todo } n \varepsilon \mathbf{N} \tag{3.1}$$

es decir, para θ fijo, la eficiencia relativa de $\mathcal{E}_c^{(n)}$ comparado con $\mathcal{E}_o^{(n)}$ es constante para todo n y, en particular, igual a la eficiencia relativa de $\mathcal{E}_c$ comparado con $\mathcal{E}_o$, que denotamos por $R_c(\theta)$.

En lo que sigue $I_o(\theta)$ e $I_c(\theta)$ denotarán las matrices de información de Fisher, acerca de $\theta \varepsilon \Theta \subset \mathbf{R}^k$, obtenidas a partir de $\mathcal{E}_o$ y $\mathcal{E}_c$ respectivamente y de forma análoga para $\mathcal{E}_o^{(n)}$ y $\mathcal{E}_c^{(n)}$.

DEFINICIÓN 1.

La matriz simétrica $R_c(\theta) = I_o^{-1/2}(\theta)\, I_c(\theta) I_o^{-1/2}(\theta)$, siempre que esté definida, es una medida matricial de la eficiencia relativa del experimento $\mathcal{E}_c$ comparado con $\mathcal{E}_o$, para hacer inferencias acerca de θ.

Una vez fijada la distribución de la variable de censura, la matriz $R_c(\theta)$ es función de θ únicamente. La definición de $R_c(\theta)$ requiere que la matriz $I_o(\theta)$ sea no singular para todo $\theta\varepsilon\Theta$ ó, lo que es equivalente, que $I_o(\theta)$ sea definida positiva para todo $\theta\varepsilon\Theta$. Esta será pues la única limitación que condicionará todo el proceso que exponemos en esta sección.

A pesar del claro paralelismo de esta defínción matricial con la correspondiente real (ver 3.1) no existe una interpretación intuitiva sencilla de la matriz $R_c(\theta)$ como medida de la eficiencia relativa, serán sus buenas propiedades y en particular las de sus autovalores las que irán dotando de contenido a dicha matriz. En base a dichas propiedades (ver corolarios 1 y 2) llamaremos a $R_c(\theta)$ matriz de eficiencias, acerca de θ, del experimento $\mathcal{E}_c$ comparado con $\mathcal{E}_o$

Exponemos en cuatro teoremas las principales propiedades de la matriz de eficiencias $R_c(\theta)$. Las desigualdades matriciales $A \geq 0$ y $A > 0$ indicarán que la matriz A es definida no negativa y definida positiva respectivamente, denotando por $\lambda_i(A)$ y $|A|$ al autovalor i-ésimo y al determinante de dicha matriz. Finalmente $\underset{\sim}{O}$ e I denotarán las matrices nula y unidad respectivamente.

TEOREMA 1.

Si $I_o(\theta) > 0$ para todo $\theta\varepsilon\Theta$ entonces:

i) $R_c(\theta) \geq 0$ y todos sus autovalores están comprendidos entre 0 y 1 para toda variable C y todo $\theta\varepsilon\Theta$.

ii) $\lambda_i(R_c(\theta)) = 1, \quad i = 1, ..., k \iff I_o(\theta) = I_c(\theta) \iff R_c(\theta) = I$

iii) $\lambda_i(R_c(\theta)) = 0, \quad i = 1, ..., k \iff I_c(\theta) = \underset{\sim}{O} \iff R_c(\theta) = \underset{\sim}{O}$

Demostración.

i) Puesto que $I_o(\theta) > 0$, $I_o^{-1/2}(\theta)$ existe para todo $\theta\varepsilon\Theta$. Por definición $I_c(\theta) \geq 0$ para toda C y $\theta\varepsilon\Theta$. Entonces (Mardia et al (1979), th. A.7.3)

$$I_o^{-1/2}(\theta) I_c(\theta) I_o^{-1/2}(\theta) \geq 0$$

es decir

$$\lambda_i(R_c(\theta)) \geq 0 \quad i = 1, ..., k \tag{3.2}$$

Por otra parte, el experimento $\mathcal{E}_o$ es suficiente para $\mathcal{E}_c$ según el criterio de Blackwell, para toda varaible C (Goel (1987)) por lo que (Goel y DeGroot (1979))

$$(3.3) \qquad I_o(\theta) - I_c(\theta) \geq 0 \quad \text{para toda} \quad C \text{ y } \theta \varepsilon \Theta$$

y repitiendo el argumento anterior tenemos que

$$I_o^{-1/2}(\theta)(I_o(\theta) - I_c(\theta))I_o^{-1/2}(\theta) \geq 0$$

es decir

$$(I - R_c(\theta)) \geq 0$$

o lo que es equivalente

$$(3.4) \qquad \lambda_i(R_c(\theta)) \leq 1 \quad i = 1, ..., k$$

Combinando las relaciones (3.2) y (3.4) se obtiene el resultado.

ii) Demostraremos que

$$\lambda_i(R_c(\theta)) = 1, \ i = 1, .., k \Longrightarrow I_o(\theta) = I_c(\theta)$$

para todo $\theta \varepsilon \Theta$. El resto es inmediato.

Por ser $I_o(\theta) - I_c(\theta) \geq 0$ se verifica (Bellman (1970), th. 3, p. 117) que

$$(3.5) \qquad \lambda_i\,(I_c(\theta)) \leq \lambda_i(I_o(\theta)) \quad i = 1, ..., k$$

por hipótesis $\lambda_i(R_c(\theta)) = 1, \quad i = 1, ..., k,$ por lo que

$$1 = |R_c(\theta)| = |I_c(\theta)|\ |I_o^{-1/2}(\theta)|^2 = |I_c(\theta)|\ |I_o(\theta)|^{-1}$$

es decir

$$|I_c(\theta)| = |I_o(\theta)| \neq 0$$

lo que equivale a

$$(3.6) \qquad 0 \neq \prod_{i=1}^{k} \lambda_i(I_c(\theta)) = \prod_{i=1}^{k} \lambda_i(I_o(\theta))$$

las relaciones (3.5) y (3.6) hacen que:

$$\lambda_i(I_c(\theta)) = \lambda_i(I_o(\theta)), \quad i = 1, ..., k$$

de donde obtenemos que

$$\text{Traza } (I_o(\theta) - I_c(\theta)) = 0$$

pero la traza de una matriz definida no negativa sólo es nula si todos sus autovalores son nulos, lo que equivale, en virtud de su descomposición espectral, a que dicha matriz es la matriz nula, es decir:

$$I_o(\theta) - I_c(\theta) = \underset{\sim}{O}$$

de donde se obtiene inmediatamente el resultado.

iii) Demostraremos que

$$\lambda_i(R_c(\theta)) = 0, \quad i = 1, ..., k \Longrightarrow I_c(\theta) = \underset{\sim}{O}.$$

El resto es inmediato.

Teniendo en cuenta que $I_o^{-1}(\theta) = I_o^{-1/2}(\theta) I_o^{-1/2}(\theta)$, entonces (Mardia et al (1979), th. A.6.2)

$$(3.7) \qquad \lambda_i(R_c(\theta)) = \lambda_i(I_c(\theta) I_o^{-1}(\theta)) = \lambda_i(I_o^{-1}(\theta) I_c(\theta)) \quad i = 1, ..., k$$

Puesto que $I_c(\theta) \geq 0$ por definición, e $I_o^{-1}(\theta) > 0$ por ser $I_o(\theta) > 0$ (Mardia et al (1979) cor. A.7.2.2.), aplicando el corolario 2.2.1 de Anderson y Das Gupta (1963) tenemos que

$$\lambda_k(I_o^{-1}(\theta)) \lambda_i(I_c(\theta)) \leq \lambda_i(I_c(\theta) I_0^{-1}(\theta)) \quad i = 1, ..., k$$

pór hipótesis, el segundo miembro de esta desigualdad es 0 para todo $i = 1, ..., k$, lo que implica que $\lambda_i(I_c(\theta)) = 0, \ i = 1, ..., k$. La descomposición espectral de la matriz $I_c(\theta)$ nos conduce al resultado.

En numerosas ocasiones la matriz de Fisher es diagonal, este hecho es el que inspira el siguiente corolario, en el que suponemos implícitamente que $I_o(\theta) > 0$.

COROLARIO 1.

Si $I_c(\theta)$ es diagonal para toda variable C y $\theta \varepsilon \Theta$, entonces

La matriz $R_c(\theta)$ es diagonal con elemento i-ésimo la eficiencia relativa acerca de θ_i (componente i-ésima de θ) para todo $\theta \varepsilon \Theta$.

Demostración

Los elementos de la diagonal principal de la matriz $I_o(\theta)$ son, por definición, las medidas de información de Fisher reales acerca de cada componente paramétrica θ_i, a partir de $\mathcal{E}_o$, dados los valores del resto de parámetros perturbadores $\theta_j, j \neq i$, por lo cual los denotaremos por $I_o(\theta_i)$. Análogamente para $I_c(\theta_i)$.

La matriz $I_o(\theta)$ es la particularización de $I_c(\theta)$ cuando la variable de censura $C = +\infty$, entonces $I_o(\theta)$ es diagonal con elementos diagonales $I_o(\theta_i)$, $i = 1,...,k$, todos positivos por ser $I_o(\theta) > 0$. Consiguientemente $I_o^{-1/2}(\theta)$ es una matriz diagonal, siendo sus elementos diagonales $1/I_o^{1/2}(\theta_i)$, $i = 1,...,k$. De esta forma $R_c(\theta)$ es una matriz diagonal y su elemento i-ésimo es $I_c(\theta_i)/I_o(\theta_i)$, $i = 1,..,k$, que a la vista de (3.1) es la eficiencia relativa acerca de θ_i de $\mathcal{E}_c$ comparado con $\mathcal{E}_o$.

En el próximo teorema utilizaremos dos experimentos censurados $\mathcal{E}_{c_i}$, $i = 1,2$, según las variables C_i, $i = 1,2$, denotando por $R_{c_i}(\theta)$, $i = 1,2$, a las eficiencias relativas correspondientes.

TEOREMA 2.

Sean $C_1 \overset{st}{\leq} C_2$ dos variables de censura e $I_o(\theta) > 0$ para todo $\theta\varepsilon\Theta$, entonces

$$R_{c_2}(\theta) - R_{c_1}(\theta) \geq 0 \quad \text{para} \quad \theta\varepsilon\Theta \Longrightarrow \lambda_i(R_{c_2}(\theta)) \geq \lambda_i(R_{c_1}(\theta))$$

$$i = 1,...,k, \quad \theta\varepsilon\Theta$$

Demostración

i) Por ser $C_1 \overset{st}{\leq} C_2$, el experimento $\mathcal{E}_{c_2}$ es suficiente para $\mathcal{E}_{c_1}$ según el criterio de Blackwell (Goel (1987)) por lo cual (Goel y DeGroot (1979))

$$I_{c_2}(\theta) - I_{c_1}(\theta) \geq 0 \quad \text{para todo} \quad \theta\varepsilon\Theta$$

entonces (Mardia et al (1979), th. A.7.3)

$$I_o^{-1/2}(\theta)(I_{c_2}(\theta) - I_{c_1}(\theta))I_o^{-1/2}(\theta) \geq 0$$

que puede expresarse alternativamente como

$$R_{c_2}(\theta) - R_{c_1}(\theta) \geq 0$$

La demostración se completa aplicando a este último resultado el teorema 3, p. 117 de Bellman (1970).

En el próximo teorema estudiamos los efectos que una transformación biyectiva del parámetro θ tiene en la matriz de eficiencias $R_c(\theta)$. Dada $\phi = g(\theta)$ una transformación biyectiva diferenciable de θ, denotamos por $A = (a_{ij})_{i,j}$ a la matriz jacobiana de la transformación inversa, es decir $a_{ij} = \frac{\partial \theta_i}{\partial \phi_j}$, $i, j = 1, .., k$, siendo θ_i , ϕ_j, $i, j = 1, ..., k$, las componentes de θ y ϕ respectivamente. Denotaremos por $I_c(\phi)$, $I_o(\phi)$ y $R_c(\phi)$ a las matrices correspondientes respecto del parámetro ϕ y por A' a la matriz traspuesta de A.

TEOREMA 3.

Sea $\phi = g(\theta)$ una reparametrización biyectiva diferenciable de θ. Si $I_o(\theta) > 0$ y A es no singular, para todo $\theta \varepsilon \Theta$, entonces

Las matrices $R_c(\theta)$ y $R_c(\phi)$ tienen los mismos autovalores para toda variable C y $\theta \varepsilon \Theta$.

Demostración.

Es conocido (Fisher (1956) que

$$I_c(\phi) = A' I_c(\theta) A \quad \text{para toda } C, \quad \text{y en particular}$$
$$I_o(\phi) = A' I_o(\theta) A$$

La matriz $I_o(\phi)$ es no singular por serlo las matrices $I_o(\theta)$ y A, entonces

$$I_c(\phi) I_o^{-1}(\phi) = A' I_c(\theta) A A^{-1} I_o^{-1}(\theta) A'^{-1} = A' I_c(\theta) I_o^{-1}(\theta) A'^{-1}$$

por lo que las matrices $I_c(\phi) I_o^{-1}(\phi)$ e $I_c(\theta) I_o^{-1}(\theta)$ tienen la misma ecuación característica (Rao (1973) p. 76) y en consecuencia los mismos autovalores. Las relaciones (3.7) completan la demostración.

COROLARIO 2.

Si $I_c(\theta)$ es diagonal para toda variable C y $\theta \varepsilon \Theta$, entonces

Los autovalores de la matriz $R_c(\phi)$ son las eficiencias relativas acerca de cada componente θ_i de θ.

Demostración.

La matriz $R_c(\theta)$ es diagonal (corolario 1) y por tanto sus autovalores son sus elementos diagonales. El teorema 3 completa la demostración.

Como consecuencia de este corolario:

Siempre que podamos transformar el parámetro ϕ en otro θ mediante una transformación biyectiva diferenciable que haga diagonal la matriz de Fisher, la matriz de eficiencias, acerca de ϕ o de θ, del experimento censurado $\mathcal{E}_c$ comparado con el no censurado $\mathcal{E}_o$, tiene por autovalores las eficiencias relativas acerca de cada componente de θ.

Por último, estudiamos el comportamiento de la matriz de eficiencias cuando los experimentos observados son $\mathcal{E}_c^{(n)}$ y $\mathcal{E}_o^{(n)}$. Denotamos por $R_{n,c}(\theta)$ a la matriz de eficiencias, acerca de θ, de $\mathcal{E}_c^{(n)}$ comparado con $\mathcal{E}_o^{(n)}$, es decir

$$R_{n,c}(\theta) = I_{n,o}^{-1/2}(\theta) I_{n,c}(\theta) I_{n,o}^{-1/2}(\theta)$$

TEOREMA 4.

Si $I_o(\theta) > 0$ para todo $\theta \varepsilon \Theta$, entonces

$$R_{n,c}(\theta) = R_c(\theta) \quad \text{para todo } n\varepsilon \mathrm{N}, \text{ toda variable } C \text{ y } \theta\varepsilon\Theta$$

Demostración.

$I_{n,c}(\theta) = nI_c(\theta)$ por la propiedad de aditividad de la matriz de Fisher (Fourgeaud y Fuchs (1972)). Igualmente $I_{n,o}(\theta) = nI_o(\theta)$ es definida positiva por serlo $I_o(\theta)$, entonces

$$R_{n,c}(\theta) = (n^{-1/2} I_o^{-1/2}(\theta))(nI_c(\theta))(n^{-1/2} I_o^{-1/2}(\theta)) = R_c(\theta)$$

4. EFICIENCIA RELATIVA. MEDIDAS REALES.

Si bien aporta algo nuevo, la sección anterior no soluciona satisfactoriamente el problema de evaluar la eficacia (eficiencia relativa) de un experimento censurado respecto de otro no censurado o censurado en menor medida (con una variable de censura estocásticamente mayor). Sin embargo las buenas propiedades de los autovalores de la matriz de eficiencias invitan a construir medidas reales de dicha eficiencia relativa a través de funciones adecuadas de dichos autovalores. El siguiente teroema establece la forma que debe tener una función real de dichos autovalores para satisfacer un conjunto de propiedades deseables en una medida real de la eficiencia relativa.

TEOREMA 5.

Sea $I_o(\theta) > 0$ para todo $\theta\varepsilon\Theta$ y $f[R_c(\theta)]$ una función real de la matriz de eficiencias $R_c(\theta)$. Si f es una función de los autovalores de $R_c(\theta)$ estrictamente creciente en cada argumento y $f(\underset{\sim}{O}) = 0$, $f(I) = 1$, entonces

$$\text{a)} \begin{cases} \text{(i)} & 0 \leq f[R_c(\theta)] \leq 1 \text{ para toda variable } C \text{ y } \theta\varepsilon\Theta \\ \text{(ii)} & 1 = f[R_c(\theta)] \Longleftrightarrow I_o(\theta) = I_c(\theta) \\ \text{(iii)} & 0 = f[R_c(\theta)] \Longleftrightarrow I_c(\theta) = \underset{\sim}{O} \end{cases}$$

b) $f[R_{c_2}(\theta)] \geq f[R_{c_1}(\theta)]$ para todo $\theta \varepsilon \Theta$, si $c_1 \overset{st}{\leq} c_2$

c) $f[R_{n,c}(\theta)] = f[R_c(\theta)]$ para todo $n \varepsilon \mathbf{N}$, toda variable C y $\theta \varepsilon \Theta$

d) $f[R_c(\theta)] = f[R_c(\phi)]$ para toda variable C, siendo $\phi = g(\theta)$ una transformación biyectiva diferenciable con matriz Jacobiana $A = \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial \phi_j}\right)_{i,j}$ no singular.

Demostración.

Los teoremas 1, 2, 4 y 3 conducen a los resultados a) b) c) y d) respectivamente.

A partir de este teorema resulta sencillo explicitar algunas medidas reales de la eficiencia relativa. Presentamos a continuación una familia de tales medidas con una sencilla interpretación intuitiva (ver sección 5.2). Para facilitar la comprensión, denotamos eventualmente por $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_k$ a los autovalores de la matriz $R_c(\theta)$.

$$f_\psi(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = \psi^{-1}\left[\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\psi(\lambda_i)\right]$$

con ψ monotona estricta y acotada en $[0,1]$. Para cada función ψ, f_ψ define una "media generalizada" de los autovalores de la matriz $R_c(\theta)$, pues se verifica que

$$\psi(f_\psi) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\psi(\lambda_i)$$

En particular eligiendo $\psi_1(\lambda) = \lambda, \psi_2(\lambda) = \log\,(\lambda + 1)$ y $\psi_3(\lambda) = \lambda^2$ obtenemos

$$f_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = \tfrac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i$$

$$f_2(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = \left[\prod_{i=1}^{k}(1 + \lambda_i)\right]^{1/k} - 1$$

$$f_3(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = \left(\tfrac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^2\right)^{1/2}$$

f_1 y f_3 son, respectivamente, las medias aritmética y cuadrática de los autovalores de $R_c(\theta)$, $(f_2 + 1)$ es la media geométrica de dichos autovalores incrementados en una unidad. Expresiones alternativas de las medidas anteriores son las siguientes

$$f_1\,[R_c(\theta)] = \tfrac{1}{k}\ \text{Traza}\ [R_c(\theta)]$$

$$f_2\,[R_c(\theta)] = |I + R_c(\theta)|^{1/k} - 1$$

$$f_3\,[R_c(\theta)] = \left\| \tfrac{1}{\sqrt{k}} R_c(\theta) \right\|$$

donde $\|\quad\|$ denota la norma ecuclídea de una matriz.

5. COMENTARIOS ADICIONALES

Terminamos este trabajo con algunas observaciones relativas a la matriz de eficiencias R_c y a sus medidas reales asociadas f_ψ.

1.- Como promedios de los autovalores de la matriz R_c, las medidas reales $f_i(R_c), i = 1,2,3$ verifican que:

$$\lambda_k(R_c) \leq f_i(R_c) \leq \lambda_1(R_c) \quad i = 1,2,3$$

Además la relación entre las medias geométrica, aritmética y cuadrática (Calot (1970) pp. 73-76) hace que

$$f_2(R_c) \leq f_1(R_c) \leq f_3(R_c)$$

dándose las dos igualdades a la vez, si y sólo si todos los autovalores de la matriz de eficiencias coinciden.

La discusión en cuanto a la elección de una de estas tres medidas se reducirá pues, en cada caso, al análisis de la representatividad, ventajas e inconvenientes de estos promedios.

2.- Si la matriz de Fisher $I_c(\theta)$ es diagonal para toda variable C y $\theta\varepsilon\Theta$ entonces la matriz de eficiencias R_c también es diagonal y las medidas reales f_ψ son los promedios correspondientes de las eficiencias relativas acerca de cada componente de θ.

3.- En la sección 3 definíamos la matriz de eficiencias mediante una generalización de la correspondiente medida real expresada en (2.2). De forma paralela podríamos haber generalizado la expresión (2.1) definiendo una medida matricial "natural" de la pérdida relativa de información mediante la *matriz de pérdidas*

$$L_c(\theta) = I_o^{-1/2}(\theta)(I_o(\theta) - I_c(\theta))I_o^{-1/2}(\theta) = I - R_c(\theta)$$

La estrecha relación entre ambas matrices, la de pérdidas y la de eficiencias hace innecesario reproducir para la primera el proceso seguido para la segunda, las propiedades de $L_c(\theta)$ serán consecuencia inmediata de las de $R_c(\theta)$, baste recordar que

$$\lambda_i(L_c(\theta)) = 1 - \lambda_i(R_c(\theta)) \quad i = 1,..,k$$

6. BIBLIOGRAFÍA

[1] **Anderson, T.W. y Das Gupta, S.** (1963). "Some inequalities on characteristic roots of matrices". Biometrika 50, 522-524.

[2] **Barlow, R. y Hsiung, J.** (1983). "Information in a life test experiment". The Statistician 32, 35-45.

[3] **Bellman, R.** (1970). "Introduction to Matrix Analysis". New York. McGraw-Hill.

[4] **Blackwell, D.** (1951). "Comparison of experiments". Proc. 2nd Berkeley Symp. Bekerley: University of California Press, 93-102.

[5] **Blackwell, D.** (1953). "Equivalent comparisons of experiments". Ann. Math. Statist. 24, 265-272.

[6] **Brooks. R.J.** (1982). "On the loss of information through censoring". Biometrika 69, 137-144.

[7] **Calot, G.** (1970). "Curso de Estadística Descriptiva". Madrid. Paraninfo.

[8] **Fisher, R.A.** (1956). "Statistical Methods and Scientific Inference". Edimburgh. Oliver and Boyd.

[9] **Fourgeaud, C. y Fuchs, A.** (1972). "Statistique". Dunod.

[10] **Goel, P.** (1987). "Comparisons of experiments and information in censored data". Proc. 4th Purdue Symp. on Statistical Decision Theory and Relation Topics. Vol. 2. Academic Press.

[11] **Goel, P. y DeGroot, M.** (1979). "Comparisons of experiments and information measures". Ann. Math. Statist. 7, 1066-1077.

[12] **Hollander, M.; Proschan, F. y Sconing, J.** (1985a). "Information in censored models". Tech. Report. M701, Department of Statistics, Tallahassee, Florida State University.

[13] **Hollander, M.; Proschan, F. y Sconing, J.** (1985b). "Measures of dependence for evaluating information in censored models". Tech. Report M706, Department of Statistics, Tallahassee, Florida State University.

[14] **Lindley, D.V.** (1956). "On a measure of the information provided by an experiment". Ann. Math. Statist. 27, 986-1005.

[15] **Mardia, K.V.; Kent, J.T. y Bibby, J.M.** (1979). "Multivariate Analysis". London. Academic Press.

[16] **Miller, R.G.,Jr** (1981). "Survival Analysis". New York, Wiley.

[17] **Rao, C.R.** (1973). "Linear Statistical Inference and its Applications". New York. Wiley.