

ESTIMACIÓN EFICIENTE PARA LA OPTIMIZACIÓN DE UN PROCESO

M. PEPIÓ Y C. POLO

Laboratorio de Estadística

E.T.S.E.I.T. - U.P.C.

La optimización de un proceso requiere la modelización conjunta de la dispersión y la tendencia central, así como su robustificación. La información requerida se recoge mediante un plan factorial replicado y se modeliza, en primer lugar, la dispersión estimando eficientemente los coeficientes mediante el método de la máxima verosimilitud y, seguidamente, se aplica el modelo para la tendencia central. Ambos se contrastan mediante el gráfico probabilístico semi-normal, para asociarse en el modelo global, que permite la optimización y su confrontación con el proceso de robustificación. Esta metodología se ilustra mediante un proceso de tratamiento térmico.

Efficient Estimation for Process Optimization

Keywords: Efficiency, Least squares, Maximum likelihood, Dispersion effects, Location effects, Global model, Robust design.

1. INTRODUCCIÓN

Entre los recientes desarrollos para la mejora de la calidad y la productividad de los procesos, cabe destacar la modelización de la dispersión y la robustificación que, junto a la tradicional estimación de los efectos de localización, ha dado lugar a la modelización global, clave para la optimización de los procesos.

Esta metodología requiere la información experimental recogida mediante un diseño factorial a dos niveles, ya fraccionado ya completo, replicado r veces. Estas repeticiones se necesitan tanto para estimar los coeficientes de dispersión

-Article rebut l'octubre de 1989.

como para elegir los niveles de los factores más robustos, es decir, menos sensibles a la influencia de los factores incontrolables, que constituyen el ruido.

Ya Bartlett y Kendall (1946) utilizaron el criterio mínimo cuadrático para estimar los coeficientes de dispersión, tomando como respuesta el logaritmo de las diferencias cuadráticas dentro de las repeticiones. Por su parte, Nair y Pregibon (1988) coligen que el análisis mínimo cuadrático es adecuado para identificar el modelo, pero los estimadores pueden ser ineficientes, por lo que, una vez identificado el modelo, recomiendan los estimadores máximo verosímiles.

2. EL MODELO GLOBAL

Sean Y_{ij} ($i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, r$) los valores de la respuesta, según un plan factorial a dos niveles, $2^p = n$, posiblemente fraccionado, y replicado r veces, que se descomponen en:

$$(1) \quad Y_{ij} = m_i + \sigma_i \epsilon_{ij} \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, r$$

siendo m_i y σ_i , la media y la desviación tipo correspondientes al i -ésimo tratamiento, y ϵ_{ij} los errores aleatorios, que se asumen independientes, normales, centrados y reducidos, es decir, $\epsilon_{ij} \sim N(0, 1)$, $\forall i$ y $\forall j$.

La modelización se expresa como

$$(2) \quad g(m_i)/k(\sigma_i^2) = \mathbf{a}_i \beta \quad \text{y} \quad h(\sigma_i^2) = \mathbf{a}_i \theta$$

donde \mathbf{a}_i es el i -ésimo vector línea de la matriz del modelo, \mathbf{A} , constituida por los niveles correspondientes a los efectos principales e interacciones, en el orden de Yates, β y θ son los vectores columna, cuyos elementos son los coeficientes de localización y dispersión, respectivamente. A su vez, las funciones $g(\cdot)$, $k(\cdot)$ y $h(\cdot)$ se elegirán según los requerimientos de la modelización, tal como se expone seguidamente.

Siendo X_i la suma de las diferencias cuadráticas, respecto a la media, dentro de las repeticiones, es decir:

$$X_i = \sum_{j=1 \dots r} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2, \quad i = 1, \dots, n,$$

entonces $X_i/\sigma_i^2 = u_i$ se distribuye según una ley de χ^2 , con $\nu = r - 1$ grados de libertad, por lo que $X_i = \sigma_i^2 u_i$, y para tener un modelo aditivo se toman logaritmos ($h(\cdot) \equiv lg$) y resulta:

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \lg X_i &= \lg \sigma_i^2 + \lg u_i \\
 &= \sum_{k=1, \dots, n} a_{ik} \theta_k + \lg u_i
 \end{aligned}$$

expresión utilizada para la estimación de θ , y donde el error aleatorio $\lg u_i$ es $\lg \chi^2$.

Si por lo menos uno de los coeficientes de dispersión es significativo, se infiere que la varianza es heterogénea y oscila según los niveles de los factores o interacciones que influyen significativamente, por medio del coeficiente correspondiente. En este caso, para que esta circunstancia no distorsione la metodología para la estimación de los coeficientes de localización y, en especial, para el estudio conjunto de su significación, mediante el gráfico probabilístico seminormal, se recurre a reducir las respuestas mediante las estimaciones de las desviaciones tipo,

$$\begin{aligned}
 (4) \quad Y_{ij/\sigma_i} &= m_i/\sigma_i + \epsilon_{ij} \\
 &= \sum_{k=1, \dots, n} a_{ik} \beta_k + \epsilon_{ij},
 \end{aligned}$$

modelo lineal en los coeficientes de localización, β_k , que será el utilizado para la estimación, ($g(m_i) \equiv m_i$ y $k(\cdot) \equiv \sqrt{\cdot}$).

3. ESTIMACIÓN

Para la estimación de los coeficientes de dispersión, dado el modelo adoptado, (3), un método obvio es el mínimo cuadrático, que da lugar a los estimadores:

$$\begin{aligned}
 \hat{\theta}_1 &= \sum_k \lg X_i / n, \quad y \\
 \hat{\theta}_k &= (\sum_{k+} \lg X_i - \sum_{k-} \lg X_i) / n, \quad k = 2, \dots, n.
 \end{aligned}$$

con $\{k+\} = \{i : a_{ik} = +1\}$ y $\{k-\} = \{i : a_{ik} = -1\}$.

Es decir, se trata del promedio de los estadísticos $\lg X_i$ afectados por los signos de la columna, de la matrix A, asociada al factor o interacción cuyo efecto se estudia.

Si algunos efectos $\hat{\theta}_k$ son significativos, Nair y Pregibon sugieren reestimar los que sí lo son mediante la máxima verosimilitud, y aducen que estos estimadores son insesgados y distribuidos simétricamente. Entonces, en el supuesto de que los errores aleatorios ϵ sean normales, los del modelo (3) de la dispersión se distribuyen $lg\chi^2$, por lo que su densidad de probabilidad conjunta es proporcional a:

$$\exp \left[\sum_{i=1}^n u_i \nu / 2 - \sum_{i=1}^n \exp\{u_i\} / 2 \right].$$

Al objeto de obtener los estimadores máximo-verosímiles, por su monotonía y unicidad, se toman logaritmos neperianos, con lo que la función se reduce a

$$\sum u_i \nu / 2 - \sum \exp\{u_i\} / 2.$$

Al sustituir u_i , en función de los efectos, ecuación (3), y prescindiendo del factor $1/2$,

$$\nu \sum (lg X_i - a_i \theta) - \sum \exp[lg X_i - a_i \theta],$$

que puede expresarse

$$(5) \quad \nu \sum lg X_i - \nu \sum a_i \theta - \sum X_i \exp[-a_i \theta].$$

Al derivar e igualar a cero, para obtener los estimadores máximo-verosímiles, resulta:

$$\nu(-\sum a_{i1}) - \sum(-a_{i1})X_i \exp[-a_i \hat{\theta}] = 0 \quad y$$

$$\nu(-\sum a_{ik}) - \sum(-a_{ik})X_i \exp[-a_i \hat{\theta}] = 0, \quad k = 2, \dots, n$$

Y teniendo en cuenta que

$$\sum_{i=1}^n a_{i1} = n \quad y \quad \sum_{i=1}^n a_{ik} = 0, \quad k = 2, \dots, n,$$

las ecuaciones máximo-verosímiles son

$$(6) \quad \nu n = \sum X_i \exp[-a_i \hat{\theta}].$$

$$(7) \quad \sum_{k+} X_i \exp[-a_i \hat{\theta}] = \sum_{k-} X_i \exp[-a_i \hat{\theta}], \quad k = 2, \dots, n$$

Sistema de n ecuaciones con n incógnitas, $\hat{\theta}_k$, que proporciona los estimadores máximo-verosímiles.

Siendo $\{k+\} = \{i : a_{ik} = +1\}$ y $\{k-\} = \{i : a_{ik} = -1\}$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{k+} X_i \exp[-\mathbf{a}_i \hat{\theta}] &= \sum_{k+} X_i \exp[-\hat{\theta}_k - \sum_{j=k} a_{ij} \hat{\theta}_j] \\ &= \exp[-\hat{\theta}_k] \sum_{k+} X_i \exp[-\sum_{j=k} a_{ij} \hat{\theta}_j], \quad y \\ \sum_{k-} X_i \exp[-\mathbf{a}_i \hat{\theta}] &= \exp[-\hat{\theta}_k] \sum_{k-} X_i \exp[-\sum_{j=k} a_{ij} \hat{\theta}_j], \end{aligned}$$

resultando, para $k = 2, \dots, n$,

$$\hat{\theta}_k = (lg \sum_{k+} X_i \exp[-\sum_{j=k} a_{ij} \hat{\theta}_j] - lg \sum_{k-} X_i \exp[-\sum_{j=k} a_{ij} \hat{\theta}_j]) / 2$$

alternativa a (7), y que sugiere un método iterativo para el cálculo de $\hat{\theta}_k$, a partir de la semilla $\hat{\theta}(0)$ que puede estar constituida, por ejemplo, por n valores iguales a la unidad, así,

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_k^{(t+1)} &= \hat{\theta}_k^{(t)} + (lg \sum_{k+} X_i \exp[-\mathbf{a}_i \hat{\theta}^{(t)}] - \\ (8) \quad & - lg \sum_{k-} X_i \exp[-\mathbf{a}_i \hat{\theta}^{(t)}]) / 2, \end{aligned}$$

hasta que $\sum |\hat{\theta}_j^{(t+1)} - \hat{\theta}_j^{(t)}| < \epsilon$, $j = 1, \dots, n$, donde ϵ es la precisión deseada en la estimación.

4. CASO BALLESTA

Como ejemplo ilustrativo se reestudia un caso debido a Pignatiello y Ramberg (1985), relativo a una experiencia para el diseño de ballestas para camiones.

El problema se refiere al desarrollo de un proceso de tratamiento térmico, de forma que la altura libre, Y , de una ballesta sin carga, fuese lo más próxima al valor nominal de ocho pulgadas, con la mínima variabilidad.

Los factores controlables eran:

- B: temperatura del horno.
- C: tiempo de calentamiento.
- D: tiempo de transferencia.
- E: tiempo de permanencia.
- O: temperatura del aceite de temple.

De estos cinco factores, la temperatura del aceite de temple no se controla fácilmente, por lo que se trata como ruido.

La experiencia se desarrolló según un plan factorial 2^{4-1} , para B,C,D y E, replicado seis veces (3 en el nivel bajo del factor O, y 3 en el alto), y los resultados se exponen en la Tabla I, junto con los valores medios, \bar{Y}_i , y las sumas de las desviaciones cuadráticas, $X_i = \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2$. En dicha tabla se ha especificado, también, la matriz de diseño A.

TABLA I

Datos de un plan factorial 2^{4-1} replicado, para estudiar la altura libre de una ballesta.

N°	B	C	BC	D	BD	CD	E	O	Y_{ij}	\bar{Y}_i	X_i
1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	+1	-1	7.78 7.78 7.81	7.79	.0006
2	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	8.15 8.18 7.88	8.07	.0546
3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	7.50 7.56 7.50	7.52	.0024
4	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	7.59 7.56 7.75	7.63	.0208
5	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	7.94 8.00 7.88	7.94	.0072
6	+1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	7.69 8.09 8.06	7.95	.0993
7	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	7.56 7.62 7.44	7.54	.0168
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	7.56 7.81 7.69	7.69	.0312
9	+1	-1	-1	+1	-1	+1	+1	-1	7.50 7.25 7.12	7.29	.0745
10	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	7.88 7.88 7.44	7.73	.1290
11	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	7.50 7.56 7.50	7.52	.0024
12	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	7.63 7.75 7.56	7.65	.0184
13	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	7.32 7.44 7.44	7.40	.0096
14	+1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	+1	7.56 7.69 7.62	7.62	.0084
15	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	+1	7.18 7.18 7.25	7.20	.0033
16	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	7.81 7.50 7.59	7.63	.0510

5. ANÁLISIS DE LOS EFECTOS DE DISPERSIÓN

Se entiende como ruido el factor o conjunto de factores cuyo control no es factible a lo largo del proceso, ya sea por impedimentos técnicos o económicos; de aquí se deriva el concepto de robustez consistente en determinar los niveles de los demás factores controlables que garanticen la menor sensibilidad posible de la respuesta frente a la variación del nivel del ruido.

Sin embargo hay casos, como el que nos ocupa en este ejemplo, en donde a pesar de que un factor es de tal naturaleza que, a efectos prácticos, deba ser considerado como ruido, por el elevado coste que supondría el mantenerlo controlado, es posible escoger y garantizar sus niveles durante el período de experimentación encaminado al estudio del proceso. De esta forma, a efectos de modelización dicho factor es uno más dentro del conjunto de los que componen el diseño experimental, permitiendo estudiar su influencia individual o en forma de interacción con los demás.

En este ejemplo la temperatura del aceite de temple, a efectos industriales, debe ser considerada como ruido, pero durante la experimentación se ha hecho el esfuerzo necesario para conocer y garantizar el valor de sus niveles bajo y alto. Como consecuencia, el diseño corresponde a un plan factorial de 5 variables a dos niveles según un esquema 2^{5-1} , tal que BCD es el generador de E. Así se han realizado 16 experiencias distintas y tres réplicas de cada una de ellas.

Tomando como respuesta X_i , se han obtenido los estimadores máximo-verosímiles de θ , según el modelo $lg\sigma_i^2 = a_i\theta$, con el método iterativo propuesto, y considerando la totalidad de los efectos e interacciones. Los valores de los coeficientes de dispersión se exponen en la Tabla II, en donde la columna encabezada por $\hat{\theta}_0$ corresponde a dichas estimaciones.

Al tomar el modelo completo, máximo-verosímiles y mínimo-cuadráticos coinciden, excepto $\hat{\theta}_I$ para el cual se verifica que $\hat{\theta}_I(\text{máx-ver}) = \hat{\theta}_I(\text{mín-cuad}) - lg(r - 1)$.

Para verificar su significación se realiza un ajuste probabilístico seminormal, tal como presenta la Figura 1, y se traza la recta que, pasando por el origen, mejor describa la alineación de los puntos de abscisa más pequeña. Dicha recta abarca todos los efectos excepto el B (temperatura del horno) que, a efectos de dispersión, es el único que debe ser considerado como significativo. Es interesante destacar que el factor O, ruido, no influye significativamente sobre la variabilidad, lo que representa una substancial simplificación en el momento de interpretar resultados y optimizar el proceso.

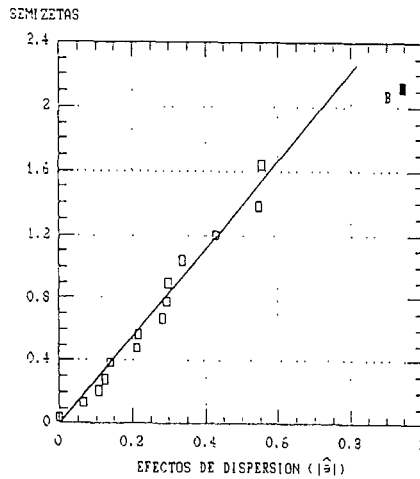


FIGURA 1
Significación de los coeficientes de dispersión

Procede seguidamente, reestimar el vector θ con la condición de que el único coeficiente no nulo es el B, además del θ_I ; resultando en este caso los valores de la columna $\hat{\theta}$, de la Tabla II.

La relación estructural entre la variabilidad del proceso y los factores controlables se estima en

$$\lg \hat{\sigma}^2 = \hat{\theta}_I + \hat{\theta}_B * B = -4.2883 + 0.6310 * B$$

donde B representa los niveles de este factor, según la codificación aplicada (-1 y +1, en los niveles experimentados). Equivalentemente

$$\hat{\sigma}^2 = \exp[-4.2883 + 0.6310 * B], \text{ cuya raíz cuadrada es}$$

$$(9) \quad \hat{\sigma} = \exp[-2.1441 + 0.3155 * B]$$

expresión que permite obtener las estimaciones de las desviaciones tipo, $\hat{\sigma}$, de la Tabla II, asociadas a cada uno de los 16 tratamiento indicados en la Tabla I.

TABLA II

Estimación de los coeficientes de dispersión y de las desviaciones tipo asociadas a los tratamientos.

Alias	$\hat{\theta}_0$	$\hat{\theta}$	n^0	$\hat{\sigma}_t$
I	-4.9316	-4.2883	1	0.0855
B + CDE	0.9440	0.6310	2	0.1606
C + BDE	-0.2835	0	3	0.0855
BC + DE	0.0002	0	4	0.1606
D + BCE	0.1245	0	5	0.0855
BD + CE	-0.2130	0	6	0.1606
CD + BE	0.3367	0	7	0.0855
E + BCD	0.1081	0	8	0.1606
O	0.1400	0	9	0.0855
BO	-0.2952	0	10	0.1606
CO	-0.2974	0	11	0.0855
DO	-0.5548	0	12	0.1606
EO	0.0648	0	13	0.0855
BCO	0.5447	0	14	0.1606
BDO	0.2154	0	15	0.0855
CDO	0.4281	0	16	0.1606

Se evidencia así que el nivel bajo de B, el codificado -1 (tratamientos con n^0 impar) es el que minimiza la variabilidad de la respuesta, debido, claro está, al signi positivo de su coeficiente en la expresión (9).

6. ANÁLISIS DE LOS EFECTOS DE LOCALIZACIÓN

Habiendo comprobado que la variancia es función de los niveles del factor B, el ajuste mínimo-cuadrático, del modelo lineal relativo a la tendencia central de la respuesta, debe realizarse ineludiblemente mediante el cambio de variable indicado como $W_{ij} = Y_{ij}/\sigma_i$.

El modelo a aplicar es

$$W_{ij} = Y_{ij}/\sigma_i = \sum_j a_{ij}\beta_j + \epsilon_{ij} \quad i = 1, \dots, n$$

es decir, se trata de dividir los valores de las respuestas por el valor estimado para la σ de cada tratamiento y aplicar la técnica del modelo lineal convencional. Realizado el ajuste, las estimaciones de los coeficientes se especifican en la Tabla III, como $\hat{\beta}$.

TABLA III
Estimación de los coeficientes de localización

Regresor Alias	$\hat{\beta}$	Error tipo	t	Niv. sig.
cte	62.126	0.157	_____	_____
B CDE	-19.890	0.157	-126.355	0.0000
C BDE	-0.766	0.157	-4.868	0.0000
B*C DE	0.164	0.157	1.045	0.3033
D BCE	-0.102	0.157	-0.648	0.5211
B*D CE	-0.048	0.157	-0.308	0.7601
C*D BE	-0.301	0.157	-1.909	0.0645
E BCD	0.513	0.157	3.261	0.0025
O	-1.278	0.157	-8.123	0.0000
B*O	0.734	0.157	4.662	0.0000
C*O	0.755	0.157	4.799	0.0000
D*O	-0.296	0.157	-1.881	0.0683
E*O	0.186	0.157	1.180	0.2460

Analizando la significación a través del gráfico probabilístico seminormal, Figura 2 (a), parece ser que el único efecto significativo es el B, sin embargo, debido a la gran diferencia entre la magnitud de $\hat{\beta}_B$ y los demás, resulta conveniente hacer una ampliación del gráfico para los valores de abscisas más pequeñas, dando lugar a la Figura 2 (b), en donde

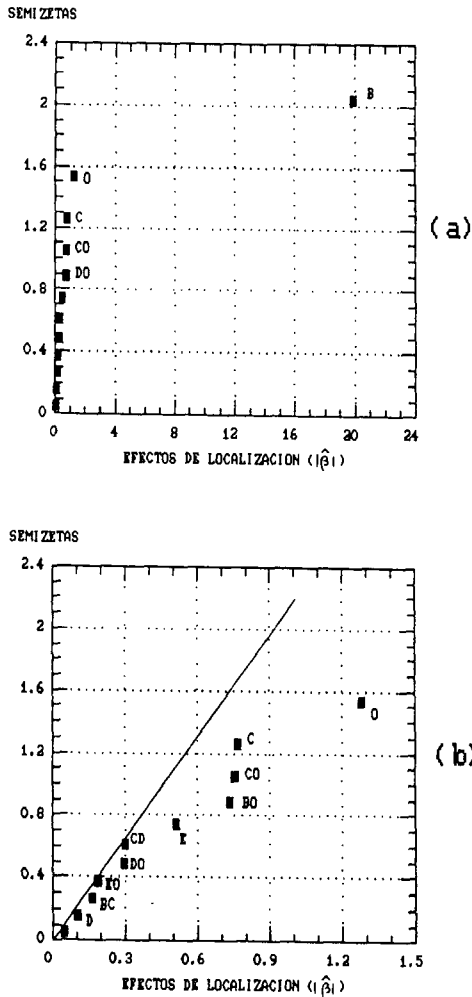


FIGURA 2

Significación de los coeficientes de localización

se observa que la recta que se adapta mejor a los puntos de abscisas situadas alrededor de cero deja fuera los puntos O, C, CO, BO y E, que junto al ya comentado B, se consideran significativos. Conclusiones coincidentes con la significación de los términos a partir del modelo lineal.

Dada la independencia de los estimadores, los valores de las $\hat{\beta}$ significativas son los obtenidos inicialmente, según constan en la Tabla III.

La modelización de los efectos de la localización conduce a

$$(10) \quad \hat{Y}/\hat{\sigma} = \hat{W} = 68.126 - 19.890 * B - 0.766 * C + 0.513 * E - 1.279 * O + \\ + 0.734 * B * O + 0.755 * C * O,$$

pero este modelo no es aplicable para determinar las condiciones operativas del proceso, ya que en él figura la variable O, temperatura del aceite de temple, que al ser de difícil control se ha considerado como ruido.

Teniendo en cuenta esta eventualidad, la forma de proceder consiste en eliminar del modelo todos los términos en los que figure el ruido, y mitigar su influencia mediante el análisis de la robustez de todos los factores que interactúan con él, es decir, seleccionando los niveles de B y de C para los cuales la influencia de O sobre la respuesta sea más pequeña. Esta selección se efectúa mediante el análisis gráfico que se expondrá posteriormente.

Por todas las consideraciones expuestas, el modelo de localización se reduce a

$$(11) \quad \hat{Y}/\hat{\sigma} = \hat{W} = 68.126 - 19.890 * B - 0.766 * C + 0.513 * E$$

La Figura 3 muestra el gráfico probabilístico Normal de los residuos, según este modelo, confirmando la admisibilidad de la hipótesis de normalidad de los errores.

Substituyendo en la ecuación (11) la desviación tipo por su expresión en función de los factores, (9), se obtiene la modelización definitiva de la respuesta:

$$(12) \quad \hat{Y} = (68.126 - 19.890 * B - 0.766 * C + 0.513 * E) * \\ * \exp[-2.1441 + 0.3155 * B],$$

donde B, C y E deben interpretarse como los valores de los niveles de los factores, temperatura del horno, tiempo de calentamiento y tiempo de transferencia, respectivamente, según las codificaciones, (-1, +1), empleadas para la especificación de la matriz del modelo.

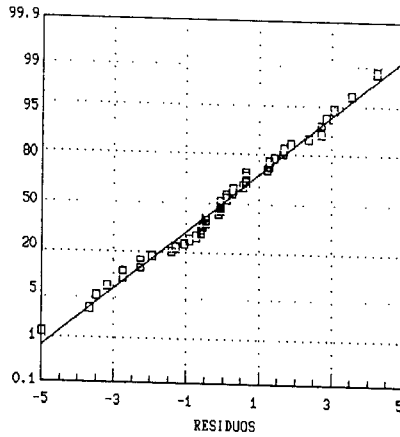


FIGURA 3
Gráfico probabilístico de los residuos

7. ROBUSTIFICACIÓN

La Figura 4 muestra la evolución de los residuos, $y_{ij} - \hat{y}_{ij}$, del modelo estructural definitivo, ecuación (12), en función del orden establecido en la matriz modelo, y permite observar que las 24 primeras conforman una nube de puntos situada a un nivel globalmente superior que las 24 restantes. Dado que el primer grupo corresponde al nivel inferior del ruido ($O = -1$) y el resto al superior ($O = +1$), ello pone de manifiesto la influencia de esta variable, tal como se había detectado en el modelo de localización.

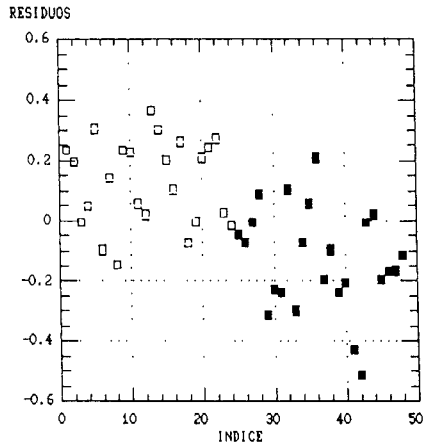


FIGURA 4

Residuos en función de la cronología de las observaciones.

Índice $\leq 24 \equiv O(-1)$ Índice $> 24 \equiv O(+1)$

El estudio de la robustez se puede realizar a partir de la Figura 5, en donde se ha representado la evolución de los valores medios de las respuestas evaluadas experimentalmente para cada uno de los niveles de los factores controlables y del ruido.

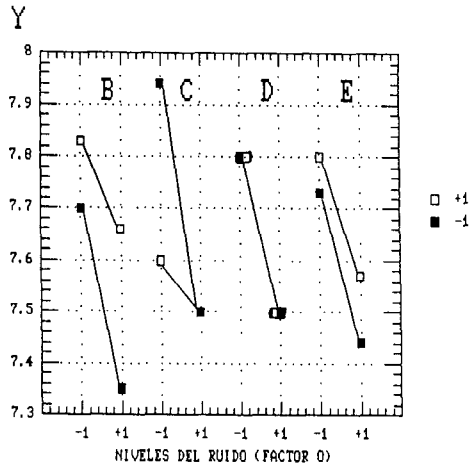


FIGURA 5

Evolución de las respuestas medias con los niveles de los factores y del ruido

En ella se aprecia que tanto el factor B como el C son poco robustos frente al ruido, ya que la variación de la respuesta, al pasar del nivel -1 al +1 de éste, es considerable para cualquier nivel del otro factor. Este hecho ya era de esperar, puesto que en el modelo de localización las interacciones BO y CO han resultado significativas. En ambos casos el nivel alto del factor controlable es el que garantiza mayor estabilidad de la respuesta, sea cual sea el nivel del ruido.

Los factores D y E no juegan ningún papel en la robustez, pues el cambio de la respuesta en función del ruido, es del mismo orden para cualquier nivel del factor.

8. DETERMINACIÓN DE LAS CONDICIONES OPERATIVAS DEL PROCESO

En el estudio llevado a cabo, se ha visto que para reducir la variabilidad se debe emplear el nivel bajo del factor B; mientras que para obtener un diseño robusto convienen los niveles altos de los factores B y C, presentándose pues un primer conflicto de intereses en lo que hace referencia al factor B.

Ya que la respuesta viene modelizada en función de los factores B, C y E, ecuación (12), y que el objetivo del estudio es situar la respuesta, altura libre de la ballesta, en su cota nominal igual a 8 pulgadas, los gráficos de las superficies de respuesta y de las curvas de nivel permitirán seleccionar las mejores condiciones de trabajo.

La Figura 6 presenta la respuesta, a partir de la ecuación (12), en función de B y E, cuando C se fija en su nivel alto, según requerimiento de la robustificación. Se observa que el valor máximo de la respuesta es de 7.97 pulgadas, por tanto no se puede trabajar a este nivel de C, si se desea alcanzar la cota nominal de 8 pulgadas, dentro del campo experimentado; por ello es necesario sacrificar el deseo de tener un proceso lo más robusto posible en aras a la consecución del objetivo dimensional.

De esta figura también se deduce que los valores más próximos a la cota nominal se consiguen para $E = +1$, nivel que se selecciona definitivamente como operativo, ya que este factor no influye ni en la robustez ni en la variabilidad.

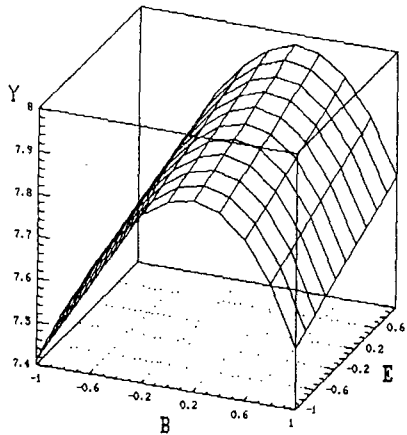


FIGURA 6
Superficie de respuesta para $C = +1$

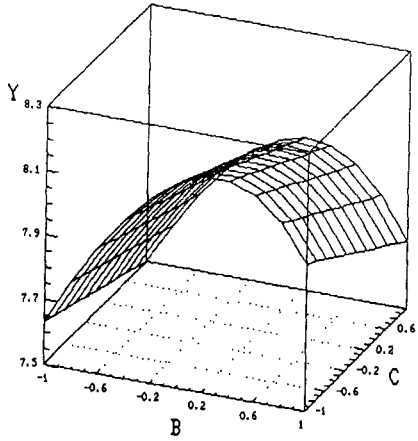


FIGURA 7

Superficie de respuesta para $E = +1$

Las Figuras 7 y 8 muestran la evolución de la altura libre de la ballesta en función de B y C para E fijado en su nivel +1, tanto en lo que se refiere a la superficie de respuesta como a las curvas de nivel, resultantes del modelo global de la expresión (12).

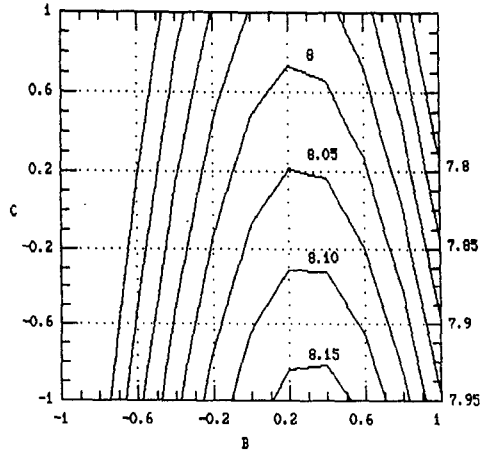


FIGURA 8

Curvas de nivel para $E = +1$

A partir de la Figura 8, se deduce que el valor de la $y = 8$, y dado que por robustez interesan valores de C lo más elevados posible, se alcanza con $C = 0.7$ para el que corresponde $B = 0.2$.

Este punto de trabajo parece razonable ya que estando C al máximo nivel con el que se puede alcanzar la cota nominal exigida, garantiza relativamente la robustez referida al factor C ; mientras que para el B se ha fijado un nivel de trabajo situado hacia el centro del campo experimental, lo que podría interpretarse como una solución de compromiso entre las exigencias contrarias respecto a los criterios de variabilidad y robustez que afectan a dicho factor.

En resumen, las condiciones recomendables de trabajo, atendiendo a la robustez, minimización de la variabilidad y situación de la respuesta cerca de su cota nominal, serían:

B: temperatura del horno: $+0.2$

C: tiempo de calentamiento: $+0.7$

D: tiempo de transferencia: el más económico dentro de los márgenes estudiados.

E: tiempo de permanencia: +1

Convendría realizar unas experiencias de confirmación graduando todos los factores en los niveles elegidos, y verificando si la respuesta media está efectivamente próxima a la cota nominal y si la variabilidad se mantiene dentro de un margen reducido.

La Figura 6 sugiere que para alcanzar el óptimo, cota nominal igual a 8, convendría realizar una nueva experimentación en la dirección de valores del tiempo de permanencia (E) y de calentamiento (C) más elevados, siempre que tecnológica y económicamente sea posible, con el objetivo de verificar si en esa dirección existen unos niveles de los factores que garanticen mejor robustez dentro de la mínima variabilidad, para aumentar el rendimiento y la productividad así como disminuir los costes.

9. BIBLIOGRAFÍA

- [1] **Bartlett, M.S. y Kendall, D.G.** (1946). "The Statistical Analysis of Variance - Heterogeneity and the Logarithmic Transformation". *J.R.S.S., Ser. B*, 8, 128-138.
- [2] **Daniel, C.** (1959). "Use of Half-Normal Plots in Interpreting Factorial Two-level Experiments". *Technometrics*, 1, 311-341.
- [3] — (1976). "Applications of Statistics to Industrial Experimentation". *J. Wiley*.
- [4] **Davies, O.L.** (1956). "The Design and Analysis of Industrial Experiments". *Longman*.
- [5] **Nair, V.N. y Pregibon, D.** (1986). "A Data Analysis Strategy for Quality Engineering Experiments". *A.T.T. Technical Journal*, 65, 73-84.
- [6] **Nair, V.N. y Pregibon, D.** (1988). "Analyzing Dispersion Effects Replicated Factorial Experiments". *Technometrics*, 3, 247-257.
- [7] **Pepió, M. y Polo, C.** (1990). "Elección de las condiciones operativas de un proceso". I.I. 2/90, Lab. d'Estadística, E.T.S.E.I.T.-U.P.C., 19 pp.
- [8] **Polo, C. y Pepió, M.** (1990). "Control Estadístico del Proceso: Selección de las condiciones óptimas", 237 pp, Monografía, A.E.C.C.
- [9] — (1990a). "La capacidad de calidad de procesos con límite físico". I.I. 1/90, Lab. d'Estadística, E.T.S.E.I.T.-U.P.C., 15 pp.
- [10] — (1990b). "Nuevo análisis de un proceso optimizado por el método de Taguchi". I.I. 3/90, Lab. d'Estadística, E.T.S.E.I.T.-U.P.C., 22 pp.

