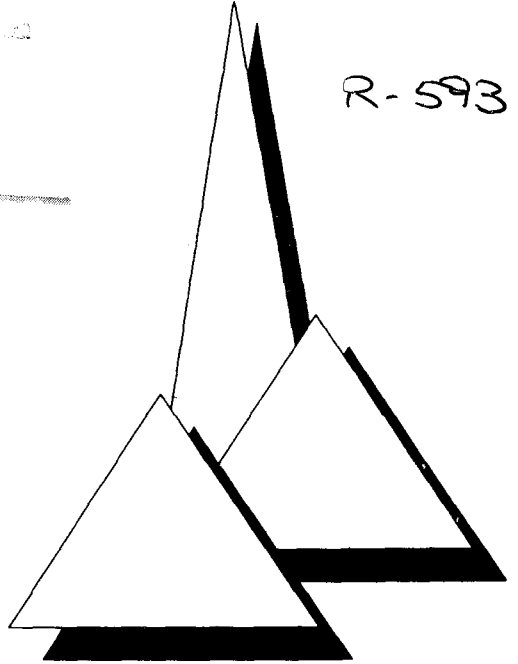


Generalitat de Catalunya
Departament d'Economia
i Finances
Biblioteca

R-593

Biblioteca



Qüestió

Quaderns d'Estadística, Sistemes,
Informàtica i Investigació Operativa

Any 1991, Volum 15, nº 1

Coordinació

Centre de Càlcul de la Universitat Politècnica de Catalunya
Avda. Dr. Gregorio Marañón, s/n. Tel. (93) 401.62.09
08028 Barcelona

Edició

PPU. Promociones y Publicaciones Universitarias, S.A.
C/ Marqués de Campo Sagrado, 16 Tel.(93) 442.03.91
08015 Barcelona

Entitats patrocinadores

Universitat Politècnica de Catalunya (U.P.C.)
Universitat de Barcelona (U.B.)
C.I.R.I.T.
Institut d'Estadística de Catalunya
Institut de Cibernètica (U.P.C.)
Departament d'Estadística (U.B.)

Consell Editor

Tomás Aluja	U.P.C. Dept d'Estadística i Investigació Operativa
Francisco Amador	Universidad de Córdoba, EITA
Manuel Artís	Universitat de Barcelona, Dept. d'Econometria, Estadística i Economia Espanyola
Jaume Barceló	U.P.C. Dept. d'Estadística i Investigació Operativa
Luis Basáñez	Institut de Cibernètica de la UPC
Josep Basart	Universitat Autònoma de Barcelona, Dept. d'Informàtica
Ramón Bevide	Univ. País Vasco-Dept. de Informàtica-San Sebastián
José Miguel Bernardo	Presidència de la Generalitat de València. Dept. d'Estadística.
Pere Brunet	U.P.C. ETSEIB, Dept. de Mètodes Informàtics
Jacob Burbea	Pittsburgh University. Dept. Mathematics and Statistics
Albert Corominas	U.P.C. ETSEIB. Dept. d'Organització d'Empreses
Carles M ^a Cuadras	Universitat de Barcelona, Dept. d'Estadística
Laureano F. Escudero	Centro de Investigaciones, U.A.M. IBM., Madrid
Antoni Espasa	Servicio de Estudios del Banco de España, Madrid
Juan Larrañeta	Universidad de Sevilla, ETSII, Dept. de Organización
Ludovic Lebart	CNRS-París
Manuel Martí	U.P.C. Dept. d'Estadística i Investigació Operativa
Narcís Nabona	U.P.C. Dept. d'Estadística i Investigació Operativa
David Nualart	Universitat de Barcelona, Dept. d'Estadística
Josep M ^a Oller	Universitat de Barcelona, Dept. d'Estadística
Fernando Orejas	U.P.C. Dept. d'Enginyeria de Sistemes, Automàtica i Informàtica Industrial
Jaume Pagés	U.P.C. Dept. d'Enginyeria de Sistemes, Automàtica i Informàtica Industrial
Albert Prat	U.P.C. ETSEIB, Dept. d'Estadística
Lluís Puigjaner	U.P.C. ETSEIB, Dept. d'Enginyeria Química
C. Radhakrishna Rao	Penn State University, Center for Multivariate Analysis
Josep Riverola	IESE, Barcelona
Marta Sanz	Universitat de Barcelona, Dept. d'Estadística
Albert Satorra	Universitat Pompeu Fabra, Dept. d'Economia.
Enric Teixidó	Consultor d'Estratègia Empresarial, Barcelona
Vicens Valls Verdejo	Universitat de València, Facultat de Matemàtiques

Secretària: Maria Cinta Pallejà

Subscripcions

Centre de Càlcul de la Universitat Politècnica de Catalunya

Tarifa vigent 1991

1 any : 2.650,--
ISSN: 0210-8054
D.L.: L-876-90
Imprimeix: Poblagràfic, S.A.

Qüestió

**Quaderns d'Estadística,
Sistemes, Informàtica
i Investigació Operativa**

Any 1991, Volum 15, nº 1



Qüestió

VOLUM 15, Número 1 (1991)

CONTINGUT

ESTIMACIÓN NO PARAMÉTRICA DE LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN	3
J.M. Vilar	
TÉCNICAS DE VALIDACIÓN CRUZADA EN LA ESTIMACIÓN DE LA DENSIDAD BAJO CONDICIONES DE DEPENDENCIA	21
A. Quintela y J.M. Vilar	
UNA NOTA SOBRE LA PROTECCIÓN DE LA INTIMIDAD CON RESPUESTA ALEATORIZADA	47
M. Ruiz Espejo y Ma. M. Ruiz Espejo	
MOSTRATGE I ESTIMACIÓ DE POBLACIONS OCULTES	55
J. del Castillo	
ALGORITMO DEL ELIPSOIDE INTERIOR PARA PROGRAMACIÓN LINEAL	69
A. Salamanca y J. Juan Ruiz	
SECCIÓ DOCENT I PROBLEMES	95
COMENTARI DE LLIBRES	129
NOVETATS DE SOFTWARE	131
RESUMS EN ANGLÈS	135
ERRATUM	137

Art de secció docent:

Estudio de la influencia de diversos factores sobre el tiempo de giro de una pesuza, mediante el uso de experimentos factoriales a dos niveles.

J. Riera y J.A. Torres

SECCIÓ DOCENT I PROBLEMES

La introducció de la nova “SECCIÓ DOCENT I PROBLEMES” a la revista QÜESTIÓ es fa amb l'objectiu d'incloure una secció on es publiquen articles de caire docent, difícilment publicables en revistes de recerca. Alhora es continua amb la antiga secció de problemes. A cada número de QÜESTIÓ s'inclourà d'un a tres problemes i les solucions es donaran en el número següent.

Els lectors poden, si ho volen, proposar problemes amb les solucions pertinents i enviar-los a QÜESTIÓ, que farà una selecció i en publicarà els més adequats, fent la corresponent referència a l'autor.

També seran ben rebudes solucions alternatives a les propostes fetes per l'autor dels problemes; l'editorial es reservarà, però, el dret a publicar-les.

PROBLEMES PROPOSATS

PROBLEMA N° 37

Demostrar que un estimador UMV (unbiased minimum variance) de un parámetro es una función simétrica de las variables aleatorias muestrales (salvo conjuntos de probabilidad 0).

J. M. Oller

Universitat de Barcelona

PROBLEMA N° 38

Sea X una v.a. tal que $P(X > 0) = 1$, con distribución absolutamente continua y con la propiedad de que X y $1/X$ tienen exactamente la misma distribución. Se pide:

- 1) Probar que la función de densidad de X debe verificar la condición

$$x^2 f(x) = f(1/x) \quad x > 0$$

- 2) Sea φ una función de densidad cualquiera. Probar que el conjunto de funciones de densidad que se expresan como

$$f(x) = \int_R y \varphi(xy) \cdot \varphi(y) dy$$

verifican también la propiedad citada.

- 3) Suponiendo que existan $E(X) = m$, $\text{var}(X) = \sigma^2$, probar que siempre se verifica la desigualdad

$$|1 - m^2| \leq \sigma^2.$$

C. M. Cuadras

Universitat de Barcelona

PROBLEMA N° 39

QUIN AUTOBÚS?: UN PROBLEMA DE TEMPS D'ESPERA D'AUTOBUSOS

Els problemes relatius als temps d'espera d'autobusos tenen una certa tradició a la literatura. Per una banda, evidentment, apareixen en els textos sobre models de trànsit urbà; però també s'hi fa referència en textos sobre fenòmens d'espera, de vegades com a exemples o qüestions.

És obvi que si els autobusos passen per la parada separats per intervals perfectament regulars i l'usuari arriba a la parada a l'atzar, el temps mitjà d'espera és igual a la meitat de l'interval entre autobusos. Però si els intervals entre autobusos segueixen una distribució exponencial, aleshores el temps mitjà d'espera és igual al temps mitjà entre autobusos; aquesta paradoxa (un resultat contrari a l'opinió comuna – si es pot parlar en un cas com aquest d'opinió comuna – però realment cert) es discuteix, per exemple a **Feller** (el resultat es pot demostrar rigorosament, per descomptat, però la clau és que si els intervals entre autobusos són diferents i l'usuari arriba a l'atzar, la probabilitat que es presenti a la parada en un interval entre autobusos llarg és més alta que la d'arribar-hi en un interval curt).

A aquest resultat relatiu a la distribució exponencial s'hi pot arribar directament o considerant-lo com un cas particular d'aquell en què hi ha una successió $h(i)$ ($i = 1, \dots, n$) d'intervals entre autobusos. A **Osuna-Newell** es demostra que, per $n \rightarrow \infty$, amb probabilitat 1, l'esperança matemàtica del temps d'espera és $E(h^2)/2E(h)$; per a la distribució exponencial de mitjana $1/\lambda$, $E(h^2) = 2/\lambda^2$ i $E(h) = 1/\lambda$, d'on resulta que l'esperança matemàtica del temps d'espera és $1/\lambda$.

A **Santaló** es discuteix quina és la millor estratègia d'un usuari, amb un destí donat, situat en una parada per la qual passen diverses línies d'autobusos que li porten, en el supòsit que el temps de pas dels autobusos de cada línia segueix una distribució exponencial amb un paràmetre propi de cada línia i que és conegut el temps de viatge de cada línia des de la parada al destí.

El problema que es proposa és el següent:

Un usuari disposa de dues línies d'autobús que el poden conduir al seu punt de destí, cada una de les quals té una parada diferent. L'usuari, des de la porta del seu domicili o origen, veu les dues parades i en un temps negligible pot anar a qualsevol d'elles, però una vegada ha anat a una li és molt difícil canviar d'opció.

Els autobusos de cada línia passen a intervals perfectament regulars, que són diferents d'una línia a l'altra i coneguts per l'usuari, el qual, però, desconeix

els instants en què passen els autobusos. L'usuari fins ara ha anat a la parada corresponent a la línia de major freqüència, cosa que li garanteix el temps mitjà d'espera menor.

Al llarg del temps, l'usuari ha observat que els altres usuaris arriben a la parada segons un procés poissonià, d'una taxa diferent per a cada línia que ha arribat a estimar amb prou precisió. Per tant, considera que el nombre d'usuaris que esperen l'autobús li dona informació sobre el temps transcorregut des del pas de l'últim autobús i es planteja fer ús d'aquesta informació per a optimitzar l'esperança matemàtica del seu temps d'espera. Concretament, es proposa estudiar les dues opcions següents:

- a) Dividir el nombre d'usuaris que esperen per la taxa d'arribada respectiva i utilitzar aquest quocient com a estimació del temps transcorregut des de l'arribada de l'últim autobús (aquesta opció no és la millor possible, pel que fa al resultat que en pot esperar, però té l'avantatge que els càlculs que haurà de realitzar cada dia són molt senzills).
- b) Seguir la regla de decisió òptima deduïda de la teoria estadística de la decisió.

Referències

- Feller, W.** An introduction to Probability Theory and its Applications. J. Wiley, vol. 1, 1950; vol. 2, 1966.
- Osuna, E.E., Newell, G.F.** "Control strategies of an idealized public transportation system". *Transportation Science*, vol. 6, 1972, pp. 52-72.
- Santaló, L.** "Un problema simple de decisió y un problema de espera". *Trabajos de Estadística e Investigación Operativa*, vol. 36, nº 3, 1985, pp. 269-279.

Albert Corominas

Universitat Politècnica de Catalunya

ESTUDIO DE LA INFLUENCIA DE DIVERSOS FACTORES SOBRE EL TIEMPO DE GIRO DE UNA PEONZA, MEDIANTE EL USO DE EXPERIMENTOS FACTORIALES A DOS NIVELES

JUAN RIERA ANTONIO
JUAN A. TORRES PLANELLS

Universitat Politècnica de Catalunya

Este estudio surge como respuesta a un ejercicio propuesto por la cátedra de Estadística de la E.T.S.E.I.B.

Nuestra propuesta consiste en aplicar el método de los diseños factoriales de experimentos a dos niveles, ensayando sobre un modelo básico de peonzas cuyas características de diseño pueden ser fácilmente alteradas. A partir de la variación de estos parámetros, pretendemos evaluar su posible influencia sobre el tiempo de giro de dichas peonzas, lo que supondrá nuestro criterio de calidad.

1. INTRODUCCIÓN

El sistema con el que vamos a experimentar consiste en un conjunto de peonzas de distintos tamaños y materiales que serán lanzadas mediante un pequeño motor eléctrico. Las partes de que consta cada una de ellas son básicamente las siguientes: (ver Figura 1)

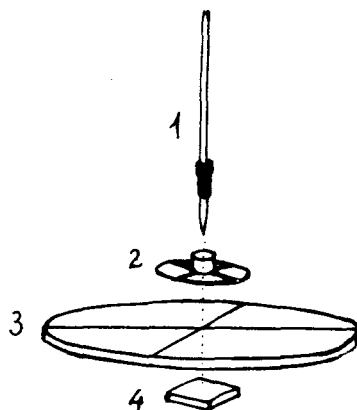


Figura 1. Esquema en explosión de la peonza.

- 1: *Eje*. Está constituido por una aguja de lana, metálica.
2. *Soporte superior*. Formado por un engranaje de despertador. Su función es mantener el disco en un plano perpendicular al eje.
3. *Disco*. De madera o cartón según el caso. Está fabricado manualmente y es el principal responsable de que el conjunto gire sin caerse durante cierto tiempo.
4. *Soporte inferior*. Pequeña pieza de goma fabricada a mano. Mantiene sujeto el disco contra el soporte superior.

Las razones fundamentales que nos han llevado a elegir este tipo de experimentos son principalmente el ahorro de tiempo y dinero. La construcción de las peonzas resulta francamente sencilla y barata, pues disponíamos de la mayoría de las materias primas. Asimismo la experimentación resultaba rápida, cómoda y muy entretenida.

En próximos apartados entraremos de forma más profunda en la descripción del diseño, así como de las causas que lo han motivado.

El objetivo que perseguimos con la realización de estos experimentos es bien claro. Pretendemos evaluar cada uno de los factores que se pondrán en juego, así como sus posibles interacciones, en el tiempo que tarda en pararse una peonza lanzada siempre a la misma velocidad.

2. DISEÑO

Para proceder a la enumeración de los factores que utilizaremos en el diseño, realizaremos antes un breve análisis teórico del experimento. En cualquier caso, hemos procurado que la aplicación de la teoría no resulte suficiente para averiguar la influencia de la variable estudiada, con lo que no podemos, a priori, afirmar si el efecto de una variable va a aumentar, disminuir o no influir en el tiempo de giro.

2.1 Análisis teórico

La peonza, si no ocurre nada anómalo, se detendrá por las dos siguientes causas:

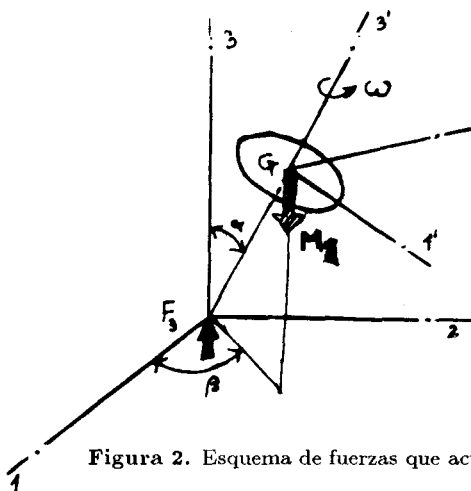
- a) Que se agote la energía de rotación que se le proporciona, debido al rozamiento eje-suelo y peonza-aire. Como siempre daremos a la peonza la misma velocidad de rotación (la del motor eléctrico) su energía cinética será inicialmente $E_0 = \frac{1}{2} I \omega_{\text{MOTOR}}^2$, en donde I será función de: Masa del disco (material), diámetro del disco y distribución de masas (chinchetas).

Por otra parte, no conocemos la ecuación que rige las pérdidas de energía por rozamiento, aunque sí sabemos que aumentarán al aumentar el tamaño y peso de la peonza.

Así nos encontramos con las siguientes cuestiones: Al aumentar el peso del disco crece su momento de inercia y, en consecuencia, su energía cinética inicial, pero también serán mayores las pérdidas por rozamiento eje-suelo. Luego, ¿girá más tiempo la peonza al emplear un material más pesado?

Si aumentamos el diámetro del disco, o ponemos un suplemento de peso en su contorno (chinchetas) nos encontramos con el mismo problema, aumentándose además en este caso el rozamiento con el aire.

- b) Otra causa de que se detenga el artilugio es que debido a una ligera imprecisión en el lanzamiento, la peonza se incline y el disco toque el suelo, con lo que se pierde gran cantidad de energía. Estudiemos el fenómeno mecánicamente aplicando el teorema del momento cinético en el punto G (ver Figura 2)



$$\frac{1}{4}mR^2 \left[\dot{\beta}^2 \sin \alpha \cos \alpha + 2\dot{\beta}\omega \sin \alpha + \ddot{\alpha} \right] = F_3 h \sin \alpha$$

(Expresión particularizada para $\beta = 90^\circ$)

Figura 2. Esquema de fuerzas que actúan sobre la peonza.

Si para este estudio suponemos una posición determinada y fijamos m e I (ya hemos visto cómo influían, en el apartado anterior, se observa que el momento que inclina la peonza disminuye al hacerlo h mientras que permanece constante el que la equilibra. Pero el sentido común, nos indica que al reducirse h también lo hace la distancia entre la periferia del disco y el suelo, con lo que la peonza tocará el suelo más fácilmente ¿Cuál de estos dos efectos será más importante? ¿Se anularán entre si? Estas preguntas intentaremos contestarlas mediante el uso de la estadística, ya que la mecánica no nos ha dado una respuesta.

Téngase en cuenta que en la realidad la peonza se detendrá debido a una mezcla de las dos causas enunciadas, pero creemos que su tratamiento por separado permitía una más clara exposición del problema, así como una más fácil introducción de los factores que se utilizarán.

2.2 Factores

- *Altura.* La denominaremos por la letra A y corresponde a la distancia entre el disco y el extremo inferior de la aguja. La hemos llamado h en el apartado 2.1 b), donde han quedado claros los motivos por los que lo introducimos en el diseño.
Para materializarlo hemos construido dos ejes con unos topes de celo en los que queda fijado el soporte superior (ver Figura 1).
- *Material.* Para designarlo usaremos la letra B. Resulta claro que según el material cada prototipo pesará más o menos, y en 2.1 a) ya hemos visto que esto puede ser decisivo.
- *Diámetro.* Lo conoceremos por C. Influye en el peso del prototipo y también puede provocar que la peonza toque antes el suelo (ver Figura 2) por lo que parece razonable predecir una posible interacción entre este

factor y al altura A. Además influye directamente en el valor del momento de inercia I .

- *Chinchetas*. Este factor será la D. Aumenta el peso, pero principalmente el momento de inercia al distribuirse la masa en zonas alejadas del eje de giro del disco.
- *Soporte*. Lo llamaremos E. Este factor va a tener un carácter más económico que físico. Usaremos soportes inferiores (ver Figura 1) de dos tipos, uno de ellos de fabricación mucho más sencilla, y en consecuencia más barata. Importante si pensamos fabricar grandes cantidades de peonzas.

2.3 Niveles de los factores

Nivel +: 20 mm.

A

Nivel -: 13 mm.

Procuraremos situar los discos en una parte bastante inferior del eje, pero sin excedernos, pues los discos tocarían el suelo demasiado pronto. También ha influido en la elección de estos dos niveles el tamaño del eje, y tal vez una cierta experiencia en juegos infantiles.

Nivel +: Cartón

B

Nivel -: Madera de balsa

Estos dos materiales fueron elegidos en función de su reducido coste, gran disponibilidad en el mercado, y la facilidad de fabricación que ofrecían.

Nivel +: 100 mm.

C

Nivel -: 70 mm.

La elección de estos niveles se fundamenta en las mismas causas que en el caso de la variable A. Se intentó llegar a un cierto compromiso entre ambas.

Nivel +: Discos con 4 chinchetas en la zona exterior regularmente distribuidas.

D

Nivel -: Discos sin chinchetas.

Colocamos las chinchetas en la parte exterior del disco por ser la zona en la que su efecto se haría más evidente. A su vez, el número de 4 chinchetas creímos que no hacía los discos excesivamente pesados y además permitía una correcta y fácil redistribución del peso.

- Nivel +: Soporte inferior cuadrado
E Nivel -: Soporte inferior circular

El soporte de goma cuadrado, resultaba más fácil de fabricar, y al ser algo más grande cumplía mejor su función. Sin embargo su forma no circular podía provocar ligeros desequilibrios aunque esto no era probable debido a su escaso peso frente al resto del prototipo.

3. DISEÑO EXPERIMENTAL UTILIZADO

Hemos realizado un diseño factorial fraccionado 2^{5-1} en dos bloques de 8 experimentos cada uno. Vamos a analizar más de cerca este diseño. Queríamos conocer los posibles efectos, y sus interacciones, de 5 factores sobre el tiempo de giro de una peonza; si quisiéramos determinarlos sin confusión alguna necesitaríamos realizar un total de 32 (2^5) experimentos, lo que no hubiera resultado muy conveniente a estas alturas del curso, dado el tiempo requerido para el montaje de cada prototipo. De entrada, decidimos reducir el número de experimentos a la mitad, conscientes de que si no obteníamos resultados esperados podíamos realizar otros 16 experimentos y obtener así el factorial completo (si bien podía aparecer un efecto bloque que podría ser controlado). Éste fue el principal motivo de fraccionar el diseño.

La causa principal del bloqueo era la fragilidad de algunas de las piezas. Con el uso y algún que otro accidente éstas se iban deteriorando con el paso del tiempo por lo que decidimos realizar dos bloques de experimentos en días consecutivos.

Otras posibles causas de bloqueo, fueron solventadas de la siguiente manera:

- a) *Factor usuario*. En el proceso de fabricación, uno de los dos integrantes del grupo se encargó de la fabricación de ejes, soportes, y del equilibrado, mientras que el otro fabricaba los discos y colocaba las chinchetas, en caso necesario.

Una vez dentro de la fase de experimentación, uno se encargaba de lanzar las peonzas mientras que el otro cronometraba.

De esta forma se eliminaban los efectos de bloque causados por la mayor o menor habilidad de cada individuo en realizar una tarea, puesto que siempre realizaba las mismas.

- b) *Factor materia prima*. Para minimizar las posibles diferencias de material al fabricar piezas supuestamente iguales, decidimos realizar el menor número posible de éstas, montando cada prototipo con sus componentes

correspondientes justo antes de realizar el experimento. Así, sólo construimos: Dos discos de cada material (uno grande y uno pequeño), dos ejes con sus respectivos soportes superiores (uno a nivel + y otro a nivel -), y dos soportes inferiores, uno cuadrado y otro redondo. Así, para realizar el experimento +++++ montábamos un disco grande de cartón, con chinchetas, con el soporte superior a 20 mm. y el inferior cuadrado.

- c) *Factor maquinaria.* Las piezas se fabricaron de forma totalmente manual, con lo que la única máquina usada en el proceso fue una maquinilla eléctrica de afeitar cuya función era acelerar las peonzas hasta su velocidad de giro inicial. Al usar siempre la misma maquinilla no había efecto bloque posible. Del estudio teórico del problema se desprendía que el factor con menores probabilidades de tener un efecto importante era el E (soporte inferior). Fue por este motivo que decidimos acomodar el resto de los factores y generar éste a partir de $E = ABCD$. Así confundíamos el efecto de E con la interacción de mayor orden posible que presumiblemente debería ser poco importante.

Para apreciar otras confusiones generadas nos remitimos a la estructura de alias de la Tabla 3. En ella se observa que todos los efectos principales se confunden siempre con interacciones de 4° orden, y las de 2° con otras de 3°.

Otro factor importante en el diseño del experimento fue la aleatorización:

- a) En primer lugar decidimos qué bloque de experimentos realizábamos el primer día lanzando una moneda. De este modo realizamos el primer día los experimentos correspondientes al bloque 1, correspondientes a los valores de la variable de bloqueo BL.

Observación: Esta variable se generó de la forma $BL = ABC$. La única interacción de 4° orden susceptible de ser confundida con ella ya estaba “ocupada” por el factor E por lo que tuvimos que conformarnos con confundirla con una de tercer orden (Para mayor detalle ver Tabla 3).

- b) Dentro de cada bloque aleatorizamos extrayendo papelitos numerados del 1 al 8 de una urna, y colocando el número extraído en la columna ORDEN ALEATORIO de la matriz de diseño. (Ver Tabla 1).

Por último, diremos que al ser la relación de definición $I = ABCDE$, éste es de resolución 5.

En consecuencia hemos construido un diseño factorial fraccionado 2^{5-1} de resolución 5, con 2 bloques de 8 experimentos cada uno.

4. ANÁLISIS

Una vez diseñado el experimento, procedimos a su ejecución. Los resultados obtenidos (en lo referente a los tiempos de giro y a su aleatorización), están incluidos en la matriz de diseño (Ver Tabla 1).

Tabla 1
Matriz de diseño

VARIABLES:						RESPUESTA	N°	
A	B	C	D	E	BL	(Y)	BLOQUE	ORDEN
-	-	-	-	+	-	7.1	2	3
+	-	-	-	-	+	5.0	1	2
-	+	-	-	-	+	32.0	1	7
+	+	-	-	+	-	22.0	2	6
-	-	+	-	-	+	21.2	1	1
+	-	+	-	+	-	17.3	2	2
-	+	+	-	+	-	48.0	2	1
+	+	+	-	-	+	46.3	1	5
-	-	-	+	-	-	27.8	2	8
+	-	-	+	+	+	22.9	1	6
-	+	-	+	+	+	47.5	1	8
+	+	-	+	-	-	29.0	2	5
-	-	+	+	+	+	37.5	1	4
+	-	+	+	-	-	28.8	2	7
-	+	+	+	-	-	66.7	2	4
+	+	+	+	+	+	51.3	1	3

Con los datos obtenidos se procedió a la estimación de los efectos, mediante el algoritmo de Yates, y su posterior representación en papel probabilístico normal.

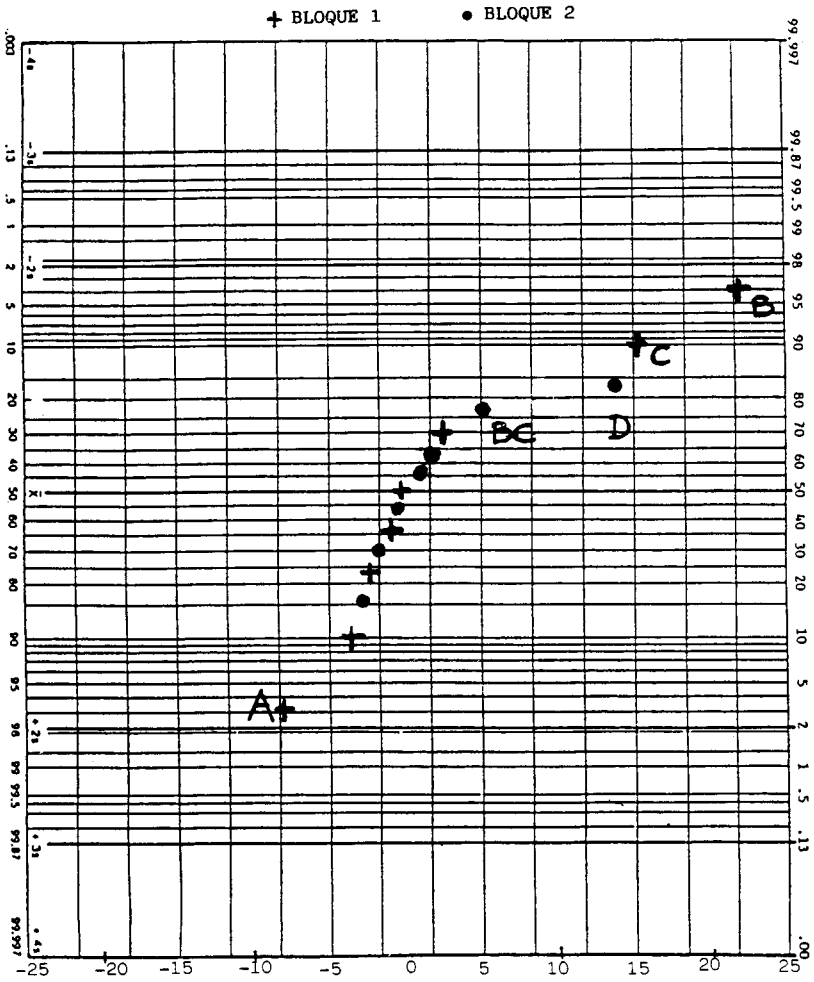


Figura 3. Representación gráfica de los efectos obtenidos.

Tabla 2
Cálculo de efectos mediante el algoritmo de Yates

A	B	C	D	Y	(1)	(2)	(3)	(4)	DIV	ESTIM.	BLOQUE	EFECTO	
-	-	-	-		7.1	12.1	66.1	198.9	509.9	16	31.8	2	MEDIA
+	-	-	-		5.0	54.0	132.8	311.0	-65.7	8	-8.2	1	A
-	+	-	-		32.0	38.5	127.2	-17.7	175.7	8	22.0	1	B
+	+	-	-		22.0	94.3	183.8	-48.0	-25.5	8	-3.2	2	AB
-	-	+	-		21.2	50.7	-12.1	97.7	123.3	8	15.4	1	C
+	-	+	-		17.3	76.5	-5.6	78.0	5.3	8	0.7	2	AC
-	+	+	-		48.0	65.8	-23.4	-5.7	40.3	8	5.0	2	BC
+	+	+	-		46.3	118.0	-24.6	-19.8	17.5	8	2.2	1	ABC
-	-	-	+		27.8	-2.1	41.9	66.7	112.1	8	14.0	2	D
+	-	-	+		22.9	-10.0	55.8	56.6	-30.3	8	-3.8	1	AD
-	+	-	+		47.5	-3.9	25.8	6.5	-19.7	8	-2.5	1	BD
+	+	-	+		29.0	-1.7	52.2	-1.2	-14.1	8	-1.8	2	ABD
-	-	+	+		37.5	-4.9	-7.9	13.9	-10.1	8	-1.3	1	CD
+	-	+	+		28.8	-18.5	-2.2	26.4	-7.7	8	-1.0	2	ACD
-	+	+	+		66.7	-9.2	-13.6	10.1	12.5	8	1.6	2	BCD
+	+	+	+		51.3	-15.4	-6.2	7.4	-2.7	8	-0.3	1	ABCD

En vista de los resultados obtenidos, decidimos realizar la siguiente simplificación: La estimación del efecto de tercer orden ABC, correspondiente por generación al efecto bloque que investigamos, no resulta ser significativo (Ver Tabla 2). Teniendo en cuenta que queda confundido con la interacción de segundo orden DE y que el valor obtenido es la suma de ambos ($ABC + DE$), tenemos suficientes razones a nuestro favor como para afirmar que no hay efecto bloque. En consecuencia, construiremos el patrón de confusión del diseño (Tabla 3) prescindiendo de la variable BL y no volveremos a tenerla en cuenta de aquí en adelante.

Observación: En la representación en papel probabilístico normal se han representado los valores correspondientes a cada bloque en distinta forma, lo que permite corroborar visualmente la argumentación anterior.

Tabla 3
Estructura de alias

$$E = ABCD; \quad I = ABCDE$$

A = AI = AABCDE = BCDE	→	A = A + BCDE
B = BI = BABCDE = ACDE	→	B = B + ACDE
C = CI = CABCDE = ABDE	→	C = C + ABDE
D = DI = DABCDE = ABCE	→	D = D + ABCE
E = ABCD		
AB = ABABCDE = CDE	→	AB = AB + CDE
AC = ACABCDE = BDE	→	AC = AC + BDE
AD = ADABCDE = BCE	→	AD = AD + BCE
BC = BCABCDE = ADE	→	BC = BC + ADE
BD = BDABCDE = ACE	→	BD = BD + ACE
CD = CDABCDE = ABE	→	CD = CD + ABE
AE = AEABCDE = BCD	→	AE = AE + BCD
CE = CEABCDE = ABD	→	CE = CE + ABD
DE = DEABCDE = ABC	→	DE = DE + ABC
BE = BEABCDE = ACD	→	BE = BE + ACD

Los efectos que más se apartan de la recta sobre la que se alinean la mayoría de las estimaciones, son B, C y D. Si bien no es tan evidente como en estos últimos, también parece claro que serán significativos los efectos A y BC.

Queda por decir que el valor estimado de cada efecto, es la suma de éste y aquellos con los que pueda confundirse ya que el diseño utilizado estaba fraccionado. Así pues, al hablar, por ejemplo del efecto B, estamos despreciando la interacción de cuarto orden ACDE frente al efecto principal real de B. Para afirmar con toda seguridad que esta simplificación es correcta deberíamos realizar otros 16 experimentos, lo que supondría mucho tiempo y trabajo frente al poco riesgo que corremos. Veamos pues con qué se confunde cada uno de los efectos tomados como significativos:

$$\begin{aligned}
B &= BABCDE = ACDE \longrightarrow B = B + ACDE \approx B \\
C &= CABCDE = ABDE \longrightarrow C = C + ABDE \approx C \\
D &= DABCDE = ABCE \longrightarrow D = D + ABCE \approx D \\
A &= AABCDE = BCDE \longrightarrow A = A + BCDE \approx A \\
BC &= BCABCDE = ADE \longrightarrow BC = BC + ADE \approx BC
\end{aligned}$$

5. CONCLUSIONES

- a) Los factores que más influyen en el tiempo de giro de las peonzas son el material (B), el diámetro (C), así como el hecho de que lleven chinchetas en su contorno (D).
Dado que los valores de los efectos correspondientes a estas variables son positivos, el tiempo de giro se verá incrementado al encontrarse estas variables en el nivel +.
- b) No hay efecto bloque, lo que permite pensar que los prototipos tienen una cierta robustez, pues en principio no se deterioran demasiado con el uso.
- c) El efecto principal de E es totalmente despreciable, por lo que podremos fabricar grandes cantidades del producto de forma más económica (soporte inferior cuadrado).
- d) El factor altura (A) también posee una influencia significativa sobre la respuesta medida, pero en este caso deberemos situarla en el nivel - para mejorar el producto.
- e) Los factores diámetro y material interaccionan entre sí, es decir, dependen una de otra.

A partir de estas conclusiones, decidimos fabricar la siguiente peonza:

- A = 13 mm. (Nivel -)
- B = Carton (Nivel +)
- C = 100 mm. (Nivel +)
- D = Chinchetas (Nivel +)
- E = Soporte inferior cuadrado (Nivel +)

Según los resultados obtenidos hasta el momento, ésta nos parecería la mejor peonza que podríamos fabricar si nuestro criterio de calidad es el tiempo de giro.

6. COMPARACIÓN ENTRE RESULTADOS ESPERADOS Y OBTENIDOS

- a) En primer lugar nos ha sorprendido que no fuera significativa la interacción entre los factores altura y diámetro, tal y como habíamos previsto anteriormente. Probablemente esto se deba a que las peonzas se mantenían en posición vertical hasta que perdían prácticamente toda su energía; esto provocaba que la peonza no se detuviera nunca debido a choques del disco con el suelo, tal y como se sospechaba en apartados anteriores.
- b) También esperábamos que el factor altura tuviese por sí solo un efecto más relevante que el obtenido experimentalmente. Tal vez se deba al buen equilibrado de las peonzas, y a la poca diferencia entre los niveles + y - de ese factor.
- c) Por último, comentar que no esperábamos que existiera la interacción BC, ni que fuera tan importante el efecto del material, ya que el cartón y la madera de balsa tenían propiedades muy similares.

7. FUTURO DE LA INVESTIGACIÓN

Los aspectos que intentaríamos aclarar en caso de querer mejorar aún más el producto serían los siguientes:

- a) Experimentar con los factores que han resultado ser significativos a unos niveles distintos de los utilizados a fin de optimizar aún más las características de calidad. Especialmente, nos interesaría saber hasta qué punto podemos disminuir el factor altura (A), para que siga aumentando el tiempo de giro, pues en los niveles utilizados el efecto no ha sido muy importante.
- b) Intentaríamos explicar la relación entre los efectos de los factores B y C que han resultado ser dependientes uno del otro. En particular nos interesaría saber si la función que describe a uno respecto del otro presenta algún máximo, para poder trabajar en él.

8. BIBLIOGRAFÍA

- [1] **George, E., Box, P., William, G., Hunter, J. y Stuart Hunter** (1989). “Estadística para investigadores. Introducción al diseño de experimentos, análisis de datos y construcción de modelos”. Editorial Reverté, 1989.
- [2] **Entrega 7 y 8** (1990). “Estadística teórica y aplicada”. Departamento de Estadística e Investigación Operativa. Sección de Técnicas Cuantitativas de Gestión (E.T.S.E.I.B.-U.P.C.). C.P.D.A. 1990.

SOLUCIONS ALS PROBLEMES PROPOSATS AL VOLUM 14. N° 1,2,3

PROBLEMA N° 34

Condicionemos a $X_m \geq 0$; entonces la densidad de las $X_1, \dots, X_m | X_m \geq 0$ viene dada por:

$$p(x_1, \dots, x_{m-1}, x_m) = \frac{2}{(2\pi)^{m/2}} e^{-\frac{1}{2} x'x} \quad x_m \geq 0$$

$$x_i \in \mathbb{R} \quad i = 1, \dots, m-1$$

Definamos el cambio de variable:

$$t_i = x_i / \|x\| \quad i = 1, \dots, m-1$$

$$r = \|x\|$$

(Este cambio transforma $\mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow [0, 1]^{m-1} \times \mathbb{R}^+$ biyectivamente)

El cambio inverso viene dado por:

$$x_i = r t_i \quad i = 1, \dots, m-1$$

$$x_m = r \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{m-1} t_i^2}$$

Por tanto:

$$\bigwedge_{i=1}^m dx_i = \bigwedge_{i=1}^{m-1} (r dt_i + t_i dr) \wedge \left(dr \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{m-1} t_i^2} - \frac{r \sum_{i=1}^{m-1} t_i dt_i}{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{m-1} t_i^2}} \right) =$$

$$= \left(r^{m-1} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{m-1} + \sum_{i=1}^{m-1} t_i r^{m-2} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{i-1} \wedge dr \wedge \dots \wedge dt_{m-1} \right) \wedge$$

$$\begin{aligned}
& \wedge \left(dr \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{m-1} t_i^2} - \frac{r \sum_{i=1}^{m-1} t_i dt_i}{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{m-1} t_i^2}} \right) = \\
& = r^{m-1} \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{m-1} t_i^2} dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_{m-1} \wedge dr - \\
& - \frac{r^{m-1}}{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{m-1} t_i^2}} \left(\sum_{i=1}^{m-1} t_i^2 dt_1 \wedge \cdots \wedge t_{i-1} \wedge dr \cdots \wedge dt_{m-1} \wedge dt_i \right) = \\
& = r^{m-1} \left(\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{m-1} t_i^2} + \frac{\sum_{i=1}^{m-1} t_i^2}{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{m-1} t_i^2}} \right) dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_{m-1} \wedge dr = \\
& = \frac{r^{m-1}}{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{m-1} t_i^2}} dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_{m-1} \wedge dr
\end{aligned}$$

Por tanto efectuando el cambio de variables aleatorias

$$\begin{aligned}
T_i &= X_i / \|X\| & i = 1, \dots, m-1 \\
R &= \|X\|
\end{aligned}$$

la marginal de T_1 en z viene dada por:

$$(0 \leq z'z \leq 1)$$

$$p(z) = \int_0^\infty \underbrace{\int \cdots \int}_{\sum_{\alpha=k+1}^{m-1} t_\alpha^2 \leq 1 - z'z} \frac{2}{(2\pi)^{m/2}} e^{-\frac{1}{2}r^2} \frac{r^{m-1}}{\sqrt{1 - z'z - \sum_{i=k+1}^{m-1} t_i^2}} dt_{k+1} \cdots dt_{m-1} dr =$$

Definiendo:

$$E_{m-k-1}(1 - z'z) = \left\{ u \in \mathbb{R}^{m-k-1} : u'u \leq 1 - z'z \right\}$$

$$p(z) = \frac{2}{(2\pi)^{m/2}} \left\{ \int_0^\infty r^{m-1} e^{-\frac{1}{2}r^2} dr \right\} \cdot$$

$$\left\{ \int_{E_{m-k-1}(1 - z'z)} \frac{1}{\sqrt{1 - z'z - \sum_{\alpha=k+1}^{m-1} t_\alpha^2}} dt_{k+1} \cdots dt_{m-1} \right\}$$

Evaluemos estas dos integrales por separado:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty r^{m-1} e^{-\frac{1}{2}r^2} dr = \int_0^\infty (2s)^{\frac{m-1}{2}} e^{-s} \frac{ds}{\sqrt{2s}} = \\ &= 2^{\frac{m}{2}-1} \int_0^\infty s^{\frac{m}{2}-1} e^{-s} ds = 2^{\frac{m}{2}-1} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \end{aligned}$$

habiendo efectuado el cambio

$$\frac{1}{2}r^2 = s \quad r = \sqrt{2s} \quad dr = \frac{ds}{\sqrt{2s}}$$

En cuanto a la segunda integral:

$$I_2 = \int_{E_{m-k-1}(1 - z'z)} \frac{1}{\sqrt{1 - z'z - \sum_{\alpha=k+1}^{m-1} t_\alpha^2}} dt_{k+1} \cdots dt_{m-1} =$$

$$= \int_0^{\sqrt{1-z'z}} \rho^{m-k-2} \left\{ \int_{S_{m-k-1}} \frac{1}{\sqrt{1-z'z-\rho^2}} d\sigma(t) \right\} d\rho =$$

(donde S_{m-k-1} es la esfera unidad en \mathbb{R}^{m-k-1} ,

e integro por "capas", ρ es la distancia al origen, en \mathbb{R}^{m-k-1})

$$= \left\{ \int_0^{\sqrt{1-z'z}} \rho^{m-k-2} \frac{1}{\sqrt{1-z'z-\rho^2}} d\rho \right\} \underbrace{\left\{ \int_{S_{m-k-1}} d\sigma(t) \right\}}$$

Superficie esfera unidad en \mathbb{R}^{m-k-1}

La superficie de una esfera unidad en \mathbb{R}^{m-k-1} es:

$$\mathcal{A}(S_{m-k-1}) = \frac{2\pi^{\frac{m-k-1}{2}}}{\Gamma(\frac{m-k-1}{2})}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\sqrt{1-z'z}} \rho^{m-k-2} \frac{1}{\sqrt{1-z'z-\rho^2}} d\rho = \\ &= \int_0^1 [(1-z'z)s]^{\frac{m-k-2}{2}} \frac{\sqrt{1-z'z}}{\sqrt{1-z'z}\sqrt{1-s} 2\sqrt{s}} ds = \\ &= \frac{(1-z'z)^{\frac{m-k}{2}-1}}{2} \int_0^1 s^{\frac{m-k-3}{2}} (1-s)^{-1/2} ds = \\ &= \frac{(1-z'z)^{\frac{m-k}{2}-1}}{2} B\left(\frac{m-k-1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{(1-z'z)^{\frac{m-k}{2}-1}}{2} \frac{\Gamma(\frac{m-k-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m-k}{2})} \end{aligned}$$

habiendo efectuado el cambio:

$$\rho^2 = (1 - z'z)s \quad d\rho = \sqrt{1 - z'z} \frac{ds}{2\sqrt{s}}$$

$$\rho = \sqrt{(1 - z'z)s}$$

luego resulta:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{(1 - z'z)^{\frac{m-k}{2}-1}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{m-k-1}{2}\right) \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{m-k}{2}\right)} \frac{2\pi^{\frac{m-k-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-k-1}{2}\right)} = \\ &= (1 - z'z)^{\frac{m-k}{2}-1} \frac{\pi^{\frac{m-k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-k}{2}\right)} \end{aligned}$$

y finalmente:

$$\begin{aligned} p(z) &= \frac{2}{(2\pi)^{m/2}} 2^{\frac{m}{2}-1} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \cdot \frac{\pi^{\frac{m-k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-k}{2}\right)} (1 - z'z)^{\frac{m-k}{2}-1} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\pi^{k/2} \Gamma\left(\frac{m-k}{2}\right)} (1 - z'z)^{\frac{m-k}{2}-1} \end{aligned}$$

que es la densidad condicionada de $T_1 | X_m \geq 0$.

Luego se repite el razonamiento para $X_m < 0$. Ahora el cambio es:

$$t_i = x_i / \|x\| \quad i = 1, \dots, m-1$$

$$r = \|x\|$$

y el cambio inverso:

$$x_i = t_i r \quad i = 1, \dots, m-1$$

$$x_m = -r \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{m-1} t_i^2}$$

y sólo cambia el signo de la forma diferencial, hecho que no hace cambiar el resultado final ya que tomamos el valor absoluto. Puesto que la densidad de T_1 no depende de si condicionamos a $X_m \geq 0$ ó $X_m < 0$ resulta que la densidad de T_1 incondicional viene dada por:

$$p(z) = \frac{\Gamma(\frac{m}{2})}{\pi^{k/2} \Gamma(\frac{m-k}{2})} (1 - z'z)^{\frac{m-k}{2}-1}, \quad 0 \leq z'z \leq 1$$

En cuanto a la segunda parte, hay que hallar la distribución de la variable $Y = T_1' T_1$, resulta, calculando primero la densidad de \sqrt{Y} ,

$$p(u) = u^{k-1} \int_{S_k} \frac{\Gamma(\frac{m}{2})}{\pi^{k/2} \Gamma(\frac{m-k}{2})} (1 - u^2)^{\frac{m-k}{2}-1} d\sigma(z) =$$

$$p(u) = u^{k-1} / (1 - u^2)^{\frac{m-k}{2}-1} \frac{\Gamma(\frac{m}{2})}{\pi^{k/2} \Gamma(\frac{m-k}{2})} \underbrace{\int_{S_k} d\sigma(z)}_{\frac{2\pi^{k/2}}{\Gamma(k/2)}}$$

$$= 2 \frac{\Gamma(\frac{m}{2})}{\Gamma(\frac{m-k}{2}) \Gamma(\frac{k}{2})} u^{k-1} (1 - u^2)^{\frac{m-k}{2}-1} \quad 0 \leq u \leq 1$$

Teniendo en cuenta que

$$Y = U^2 \quad U = \sqrt{Y}$$

$$du = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$$

y, finalmente,

$$p(y) = \frac{\Gamma(\frac{m}{2})}{\Gamma(\frac{m-k}{2})\Gamma(\frac{k}{2})} y^{\frac{k}{2}-1} (1-y)^{\frac{m-k}{2}-1} \quad 0 \leq y \leq 1$$

es decir $Y \sim B(\frac{m-k}{2}, \frac{k}{2})$.

J. M. Oller
Universitat de Barcelona

PROBLEMA N° 35

1) Consideremos el caso unidimensional. Desarrollando por Taylor en un entorno de θ_0 , podemos escribir

$$U(x, \theta) = U(x, \theta_0) + (\theta - \theta_0) \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right)_0 + \frac{1}{2} \nu (\theta - \theta_0)^2 k(x)$$

donde $|\nu| < 1$.

Indicando

$$U.(\theta) = \sum_{i=1}^n U(x_i, \theta)$$

podemos poner

$$\frac{1}{n} U.(\theta) = \frac{1}{n} U.(\theta_0) + (\theta - \theta_0) \frac{1}{n} \sum \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right)_0 + \frac{1}{2} \nu (\theta - \theta_0)^2 \bar{k}$$

Suponiendo que $E_g k(x) < M$, por la ley de los grandes números

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} U.(\theta_0) &\longrightarrow E_g [U(x, \theta_0)] = 0 \\ \frac{1}{n} \sum \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right)_0 &\longrightarrow -H(\theta_0) \\ \bar{k} &\longrightarrow E_g k(x) < M \end{aligned}$$

Luego podemos establecer la siguiente igualdad asintótica

$$\frac{1}{n} U.(\theta) = -H(\theta_0) (\theta - \theta_0)$$

Para un δ suficientemente pequeño tenemos que $U.(\theta)$ cambia de signo al pasar de $\theta_0 - \delta$ a $\theta_0 + \delta$, y esto ocurre con probabilidad tan próxima a

Otra aplicación concierne a modelos bivariantes de supervivencia. Supongamos que (T_1, T_2) son tiempos de supervivencia con funciones de supervivencia marginales

$$S_i(t_i, \beta) = P(T_i > t_i) \quad i = 1, 2$$

y función de supervivencia conjunta

$$(1) \quad \begin{aligned} S(t_1, t_2, \beta) &= P(T_1 > t_1, T_2 > t_2) = \\ &= [S_1(t_1, \beta)^{1-\theta} + S_2(t_2, \beta)^{1-\theta} - 1]^{(-1/(\theta-1))} \end{aligned}$$

que depende de un parámetro de dependencia positiva $\theta > 1$, y que se interpreta como un cociente de funciones de riesgo. El caso $\theta = 1$ corresponde a independencia estocástica. (1) es el llamado modelo de Clayton-Oakes, que depende de las distribuciones marginales S_1, S_2 y de θ . Sin embargo la estimación de β es bastante complicada. Tomando el modelo de independencia

$$(2) \quad I(t_1, t_2, \beta) = S_1(t_1, \beta) \cdot S_2(t_2, \beta)$$

cuyas marginales son también S_1, S_2 , la estimación de β es bastante más fácil. Como el estimador máximo verosímil $\hat{\beta}$ obtenido tomando (2) es consistente con la distribución (1), puesto que tienen las mismas marginales, $\hat{\beta}$ cumple también las propiedades del enunciado (converge al verdadero valor del parámetro y es asintóticamente normal).

C. M. Cuadras
Universitat de Barcelona

PROBLEMA N° 36

Sea $S = U \Lambda U'$ la descomposición espectral de S . Consideremos $S^{-1/2} = U \Lambda^{-1/2} U'$, donde $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$, $\Lambda^{-1/2} = \text{diag}(\lambda_1^{-1/2}, \dots, \lambda_p^{-1/2})$. Entonces $S^{-1/2} S^{-1/2} = S^{-1}$. Consideremos la transformación $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$

$$(1) \quad \mathbf{y} = S^{-1/2}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$$

Entonces la distancia de Mahalanobis $(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)' S^{-1}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$ es

$$(2) \quad \begin{aligned} d_{ij}^2 &= (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}} - (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}))' S^{-1/2} S^{-1/2} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}} - (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})) = \\ &= (\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j)'(\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j) \end{aligned}$$

es decir, es una distancia euclídea fundamental. Fijémonos que (1) transforma \mathbf{X} en \mathbf{Y} , donde la matriz de covarianzas para la matriz de datos transformados \mathbf{Y} es la identidad

$$S_y = \frac{1}{n} \mathbf{Y}' \mathbf{Y} = I$$

Sea \mathbf{v} un vector cualquiera. Como $S_y \mathbf{v} = \mathbf{v}$ tenemos que $\mathbf{Y}' \mathbf{Y} \mathbf{v} = n \mathbf{v}$, es decir, multiplicando a la izquierda por \mathbf{Y}

$$(\mathbf{Y} \mathbf{Y}') \mathbf{Y} \mathbf{v} = n \mathbf{Y} \mathbf{v}$$

Luego n es un autovalor de $B = \mathbf{Y} \mathbf{Y}'$ y como \mathbf{v} es cualquiera no puede haber otro autovalor mayor que n . Una propiedad válida para toda matriz simétrica $A = (a_{ij})$ dice que $\lambda_1 \leq a_{ii} \leq \lambda_p$ donde $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_p$ son los autovalores. Luego $B = (b_{ij})$ verifica

$$0 \leq b_{ii} \leq n \quad i = 1, \dots, n$$

Además, como $B = \mathbf{Y} \mathbf{Y}'$ podemos escribir $b_{ij} = \mathbf{y}'_i \mathbf{y}_j$ luego (2) es también igual a

$$(3) \quad d_{ij}^2 = b_{ii} + b_{jj} - 2b_{ij} \geq 0$$

Además debe ser $b_{ij} \leq (b_{ii} + b_{jj})/2 \leq n$. Luego, el valor máximo de (3) se alcanza para $b_{ii} = b_{jj} = n$, $b_{ij} = 0$, es decir,

$$0 \leq d_{ij}^2 \leq 2n.$$

La segunda desigualdad pedida es inmediata, pues se verifica

$$\begin{aligned} d_{i0}^2 &= (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' S^{-1} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) \\ &= (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' S^{-1/2} S^{-1/2} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) \\ &= \mathbf{y}'_i \mathbf{y}_i = b_{ii} \end{aligned}$$

Luego

$$0 \leq d_{i0}^2 \leq n.$$

C. M. Cuadras
Universitat de Barcelona

COMENTARI DE LLIBRES

A. Martín Andrés J. de Luna del Castillo

“BIOESTADÍSTICA para las ciencias de la vida”

Ediciones Norma S.A. Las Rozas (MADRID) 1989.

614 pp. incluyendo 19 tablas estadísticas.

“Bioestadística para las ciencias de la vida” es un tratado que recoge la casi totalidad de las técnicas estadísticas que son usualmente utilizadas en los trabajos y publicaciones médicas, con un nivel de formalismo asequible a aquellos que utilizan la estadística con conocimientos matemáticos básicos. En este sentido creo que el libro es de gran utilidad, fundamentalmente para los profesionales de la medicina y a medida que se vaya conociendo, estará sobre la mesa de todos aquellos que se dedican a la investigación clínica desplazando a otros del mismo estilo hasta ahora utilizados, por ser mucho más completo.

El libro, como sus autores indican en la introducción, esta dividido en tres partes:

La primera consta de un solo capítulo y esta dedicada a la estadística descriptiva elemental. Se describen las formas más usuales de presentar los datos y se definen algunos estadísticos como formas de resumir la información.

La segunda parte consta de dos capítulos y está dedicada a dar nociones básicas del Cálculo de Probabilidades. En el primero merecen especial mención los apartados correspondientes a probabilidad condicionada con sus aplicaciones al teorema de Bayes, a la definición de conceptos epidemiológicos y descripción de métodos diagnósticos. En el segundo se trata el concepto de variable aleatoria y distribuciones de probabilidad. Resulta éste el capítulo más complicado de escribir, por cuanto se pretende desarrollar sin el formalismo usualmente utilizado en matemáticas, es por ello que los autores se ven obligados a dar fórmulas y expresiones que resultan confusas, como ocurre con la interpretación que se hace del coeficiente de correlación.

La tercera parte, dedicada a la inferencia estadística resulta de gran interés, pues en ella se tratan los conceptos de estimador y sus propiedades y el concepto de intervalo de confianza, de una forma asequible para aquellos que carecen de unos buenos fundamentos en el cálculo de probabilidades y para todos aquellos

que nos dedicamos a la estadística aplicada, por el gran número de contrastes de hipótesis que en él se describen. Sin embargo dos de los temas que son utilizados con frecuencia en los trabajos clínicos, como son los referentes a regresión logística y modelos loglineales no aparecen en esta obra.

Cada capítulo va ilustrado con ejemplos que resultan de gran utilidad didáctica. Al final, un resumen sobre todo lo tratado es también de gran utilidad para el lector.

Siguiendo la tendencia de algunos libros recientes de estadística, sería interesante que los autores incluyeran, en una edición posterior, un diskette con datos y programas que permitiera al lector practicar los métodos estadísticos que conllevan una mayor complejidad de cálculo.

El libro en definitiva resulta muy recomendable para todos los que estén de una u otra forma interesados en la estadística aplicada y para aquellos lectores de trabajos experimentales, en especial aquellos que tratan temas médicos por dos razones fundamentales: por estar tratados de una forma asequible para los que tienen una formación matemática elemental y por la amplia y completa descripción de contrastes de hipótesis contenidos en el libro.

M. Rios.

NOVETATS DE SOFTWARE

La introducció de la nova secció de "NOVETATS DE SOFTWARE" a la revista QÜESTIÓ es fa amb la finalitat de promoure l'intercanvi d'informació relacionada amb programes d'ordinador disponibles, destinats a l'implementació de metodologia estadística, d'informàtica o d'investigació operativa.

A causa de l'important creixement que ha experimentat darrerament la utilització dels ordinadors a totes les àrees científiques i tècniques i, a les esmentades més amunt, en particular, hi ha un bon nombre d'investigadors que han desenvolupat un software propi, l'existència del qual és desconeguda, de vegades, per a molts lectors que el podrien aprofitar. Per això, creiem que és convenient i útil fer-lo conèixer mitjançant aquesta revista, amb el benentès que només actuaria com a mitjà de difusió.

Per tal d'uniformitzar la descripció del software, adjuntem una butlleta que ha de ser omplena i tramesa a l'editorial de QÜESTIÓ.

Amb tota certesa, la vostra col·laboració serà d'utilitat per a molts lectors als qui facilitarà el treball i que, alhora, podran ajudar els autors del programes suggerint-los possibles millores.

Nom del programa:

Area/àrees d'aplicació (Estadística, Sistemes, etc.):

Descripció del software:

- Llenguatge:
- Ordinador/s:
- Sistema operatiu:

Està disponible en els suports següents:

Floppy disk/diskette. Assenyaleu:

Mida: Densitat: una dues cares

Cinta magnètica. Assenyaleu:

Mida Densitat Codi

Distribuït per:

Configuració mínima de hardware requerida:

Requereix l'ensinistrament de l'usuari:

Documentació

Llistat, font disponible:

Grau de desenvolupament:

Es fa servir aquest software normalment?

En cas afirmatiu

des de quan?

a quants llocs?

L'autor d'aquest software està disponible per atendre les preguntes dels usuaris?

Descripció del que fa l'esmentat software: (200 paraules aproximadament).

Posibles usuaris:

Camps d'interès:

Nom de l'autor/s:

Institució:

Adreça:

Número de telèfon:

RESUMS EN ANGLÈS

JUAN MANUEL VILAR FERNÁNDEZ

Non Parametric Estimation of Distribution Function.

Let X be a random variable with a distribution function $F(x)$ and a probability density function $f(x)$, and X_1, X_2, \dots, X_n a sequence of realizations of X , which are not necessarily independent. Two general nonparametric estimators (nonrecursive and recursive) of distribution function are proposed.

Under suitable conditions, a asymptotic variance and covariance of the estimators are obtained. Finally, consistency and asymptotic normality properties are proved.

A. QUINTELA y J.M. VILAR FERNÁNDEZ

Cross-Validation Techniques in Density Estimation under Dependence Conditions.

We study modifications of the Kullback-Leibler and least-squares methods to obtain the smoothing parameter of a general nonparametric density estimator, using the random sample, when the observed data are dependent.

Theorems are established which shows that the above parameters are asymptotically optimal, and a simulation study is presented.

M. RUIZ ESPEJO y M^a M. RUIZ ESPEJO

On the protection of privacy with randomized response.

We study the uncertainty produced before obtaining information by sampling from a proportion that is a measure of the percentage of people giving affirmative or negative answers to an intimate question, and after obtaining a reply using Warner's (1965) technique. The study is carried out through the use of Shannon's entropy.

JOAN DEL CASTILLO

Sampling and Estimation of Elusive Populations.

This paper reviews some of the major methodologies applied to study rare and elusive populations as snowball sampling, capture-recapture technique and nominative methods. We also propose a new method to estimate the size of cocaine-using population in a big city. This new method uses two random selections and is capable to estimate even the size of the occultation of the drug-using phenomenon.

ÁNGEL SALAMANCA FERNÁNDEZ y JESÚS JUAN RUIZ

An inner ellipsoid algorithm for linear programming.

A interior point algorithm for linear programming is developed. At every step of the method an interior point to the polytope is available. With center at this point, an ellipsoid wholly included in the polytope is considered. The optimization of the linear objective over the ellipsoid is carried out through the solution of a least squares type system of equations. The resulting interior point is adopted for the next iteration. As a result of this work, two different methods have been proposed for solving the least square problem, each showing a considerable decrease in the number of operations required in every step. Lastly, a computer application was developed for the method, in the Fortran 77, for an IBM PC AT, to carry out an experimental study of the behaviour of the algorithm in comparison with the Simplex Method.

**ERRATUM TO
AN EIGENVECTOR PATTERN ARISING
IN NON LINEAR REGRESSION**

(QÜESTIÓ, Vol. 14, n° 1,2,3 pp. 89-95)

C.M. CUADRAS
Departament d'Estadística
Universitat de Barcelona

On page 92, instead of $B = APA$ it should be

$$B = PAP$$

On page 92, line 14, it should say

(Perron's theorem)

ACNOWLEDGEMENT

The author is grateful to H. Neudecker for pointing out these errors in the paper in question.

Qüestió

Quaderns d'Estadística
Sistemes. Informàtica
i Investigació Operativa

FORMULARI DE SUBSCRIPCIÓ / FORMULARIO DE SUBSCRIPCIÓN

NOM / NOMBRE
ENTITAT / ENTIDAD*
DEPARTAMENT / DEPARTAMENTO*
ADREÇA / DIRECCIÓN
CIUTAT / CIUDAD
PAÍS / PAIS

VULL SUBSCRIURE'M A **QÜESTIÓ** I ATENDRÉ EL PAGAMENT DE L'IMPORT DE LA SUBSCRIPCIÓ PER L'ANY 1991, 2.650 PTES. / DESEO SUSCRIBIRME A **QÜESTIÓ** Y EFECTUARÉ EL PAGO DEL IMPORTE DE LA SUSCRIPCIÓN PARA EL AÑO 1991, 2.650 PTAS.

PER / POR**

- DOMICILIACIÓ BANCÀRIA SEGONS FORMULARI ADJUNT/DOMICILIACIÓN BANCARIA SEGÚN FORMULARIO ADJUNTO.
- XEC A NOM DE **QÜESTIÓ**/CHEQUE A NOMBRE DE **QÜESTIÓ**.
- INTERCANVI DE REVISTA/INTERCAMBIO DE REVISTA.

SIGNATURA / FIRMA

DATA / FECHA

TRAMETRE A / REMITIR A

QÜESTIÓ - CC UPC
AVDA. DR. GREGORIO MARAÑÓN, S/Nº
08028 BARCELONA

* No omplir si la subscripció és personal / No rellenar si la subscripción es personal

** Marcar la casella apropiada / Marcar la casilla apropiada

El abajo firmante
autoriza al Banco/Caja
Agencia, de la calle
de la ciudad D.P. abonar a
la revista Qüestiió con cargo a mi cuenta cte./de ahorro nº
..... las suscripciones a **QÜESTIIÓ** a las tarifas vigentes.

....., a de 19

Firmado:

El abajo firmante
autoriza a la Revista Qüestiió a cargar en mi cuenta cte. / de ahorro
nº, en el Banco/Caja
Agencia de la calle
de la ciudad de D.P., por el
importe de las tarifas vigentes de las suscripciones anuales a **QÜES-
TIIÓ**.

....., a de 19....

Firmado:

**AUTORIZACIÓN DE DOMICILIACIÓN DEL PAGO DE LAS SUS-
CRIPCIONES ANUALES A QÜESTIIÓ. PARA HACERLA EFECTIVA,
RELLENAR LAS DOS PARTES, RAYANDO LAS OPCIONES INÚTILES, FIR-
MARLAS Y REMITIRLAS AMBAS A LA SECRETARÍA DE QÜESTIIÓ - CC
UPC, AVDA. DR. GREGORIO MARAÑÓN, S/Nº. BARCELONA 08028.**

NORMES SOBRE LA PRESENTACIÓ D'ARTICLES PER A QÜESTIÓ

La revista accepta per a la seva publicació articles originals no sotmesos a consideració en cap altra revista dins els següents àmbits: Estadística, Sistemes, Informàtica i Investigació Operativa. Els articles poden ser teòrics o aplicats, incloent aplicacions dins l'àmbit docent.

L'autor presentarà dues còpies del treball mecanografiat en DIN A4, en una sola cara, a doble espai i amb marges amplis, a la secretaria de Qüestió. S'acceptaran articles en anglès, francès, o en qualsevol llengua oficial de l'estat espanyol.

Les referències bibliogràfiques es faran indicant el cognom de l'autor seguit de l'any de la publicació entre parèntesi, per exemple: Mahalanobis (1936), Rao (1982b), i llistades alfabèticament en la Bibliografia al final de l'article.

NORMAS SOBRE LA PRESENTACIÓN DE ARTÍCULOS PARA QÜESTIÓ

La revista acepta para publicar artículos originales no sometidos a consideración en ninguna otra revista en los siguientes ámbitos: Estadística, Sistemas, Informática e Investigación Operativa. Los artículos pueden ser teóricos o aplicados, incluyendo aplicaciones dentro del ámbito docente.

El autor presentará dos copias del trabajo mecanografiado en DIN A4, en una sola cara, a doble espacio y con amplios márgenes, a la secretaría de Qüestió. Se aceptan artículos en inglés, francés, o en cualquier lengua oficial del estado español.

Las referencias bibliográficas se efectuarán indicando el apellido del autor seguido del año de la publicación entre paréntesis, por ejemplo: Mahalanobis (1936), Rao (1982b), y serán listadas alfabéticamente en la Bibliografía al final del artículo.

CONTRIBUTIONS

Those wishing to contribute to the journal should send two copies of their manuscripts in English, French or any of the languages spoken in Spain, to the editorial board of Qüestió, which address is

Qüestió
Centre de Càlcul de la U.P.C.
Avda. Gregorio Marañón, s/n
08028 Barcelona

