

# CIRCULACIONES Y FLUJO MÁXIMO CON COTAS PARAMÉTRICAS

H.I. CALVETE y P. MATEO

Universidad de Zaragoza

*Se estudian los problemas de obtención de circulaciones factibles y de flujo máximo en redes con cotas inferiores y superiores sobre los arcos, que son funciones lineales dependientes de un parámetro. Se caracteriza la existencia de circulaciones paramétricas y de flujos paramétricos factibles y se dan condiciones necesarias y suficientes para la optimalidad de un flujo paramétrico. Finalmente, se proponen algoritmos que permiten su cálculo.*

**Circulations and maximum flow parametric bounds.**

**Keywords:** Maximum flow, circulation, parametric.

## 1. INTRODUCCIÓN

El objeto de la programación paramétrica es estudiar el comportamiento de las soluciones óptimas y de la función objetivo de un problema cuando se realizan modificaciones en sus coeficientes. Este tipo de estudio tiene importancia ya que en muchas aplicaciones se presentan un gran número de problemas que difieren

---

—Article rebut el novembre de 1991.

—Acceptat el juliol de 1992.

uno de otro sólo en pequeñas modificaciones del problema original. Desde el punto de vista de la programación lineal, el problema se resuelve calculando la solución óptima para intervalos adyacentes de variación del parámetro. Si el problema es  $\text{Max } Z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$  sujeto a  $\{\mathbf{Ax} = \mathbf{b}(\lambda), \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \lambda \in [0, \Lambda]\}$  entonces la función  $Z_{\max}(\lambda)$  es una función lineal a trozos, continua y cóncava sobre el intervalo en el que existe solución. Además, dados dos puntos de ruptura  $\lambda_k < \lambda_{k+1}$  y una solución óptima  $\mathbf{x}^*$  para  $\lambda^*$ ,  $\lambda_k < \lambda^* < \lambda_{k+1}$ ,  $\mathbf{x}^*$  es óptima sobre el intervalo cerrado  $[\lambda_k, \lambda_{k+1}]$  (véase Gal (1979)).

Ruhe (1985) aplica esta aproximación, que a menudo se denomina horizontal, al problema de máximo flujo paramétrico. En ella se construye la solución óptima y el valor del máximo flujo “trozo a trozo”, es decir, en cada etapa del algoritmo se obtiene la solución óptima para un intervalo de variación del parámetro adyacente al de la iteración anterior. En consecuencia, se dispone de la solución exacta sobre los intervalos adyacentes ya estudiados, pero no se tiene información sobre la solución óptima para el resto de los valores del parámetro.

Hamacher y Foulds (1989) desarrollan una aproximación distinta al tratamiento de este problema, en la que, en cada iteración, se determina una mejora del flujo existente definida sobre todo el intervalo de variación del parámetro. Esta aproximación se denomina vertical. En este caso, el valor óptimo de la función objetivo se aproxima por una función continua y lineal a trozos, sobre el intervalo en el que existe solución.

En la figura 1 se ilustran ambas aproximaciones. La línea gruesa indica el valor de  $Z(\lambda)$ , que aproxima  $Z_{\max}(\lambda)$ , obtenido tras dos iteraciones. La flecha señala el sentido en el que se mueve el algoritmo.

En este artículo se considera el problema de obtener circulaciones factibles y de determinar el valor del flujo máximo que puede circular por una red en la que hay definidas cotas superiores e inferiores sobre los arcos que son funciones lineales de un parámetro  $\lambda$ , que toma valores en el intervalo  $[\lambda_1, \lambda_2]$ . Los algoritmos que se presentan, en la línea del propuesto por Hamacher y Foulds, consideran en cada iteración flujos no triviales sobre todo el rango de variación del parámetro, que se acercan de una manera “vertical” a una circulación factible o a un flujo máximo.

En la sección 2 se introducen los conceptos básicos, y se obtienen condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una circulación paramétrica y de un flujo paramétrico factibles. La sección 3 incluye un algoritmo para la obtención de una circulación paramétrica factible basado en una técnica de etiquetado. Dado el caso, el algoritmo determina asimismo un conjunto de nodos para el que no se verifica la condición de existencia de circulaciones factibles. En la sección 4 se caracterizan los flujos paramétricos máximos. La sección 5 incluye

un algoritmo para la obtención de flujos paramétricos máximos, a partir de un flujo paramétrico factible. Finalmente, en la sección 6, se muestra un caso ilustrativo.

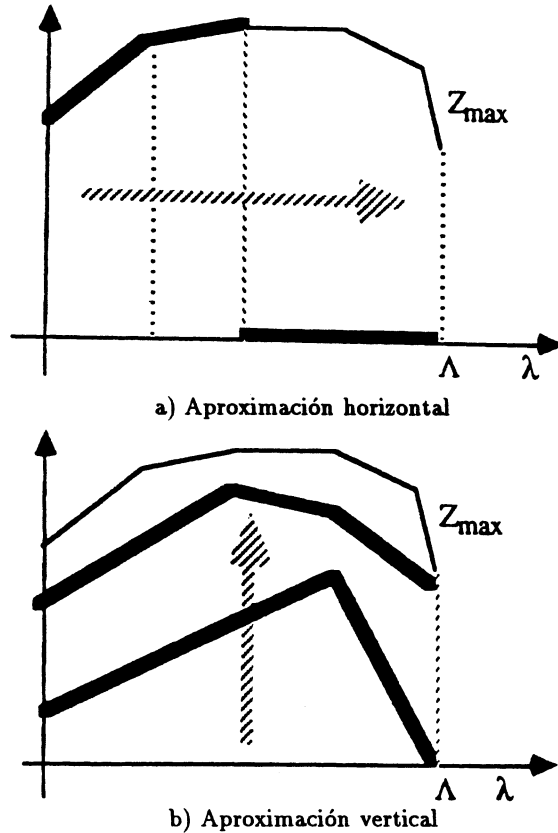


Figura 1. Cálculo del valor de un flujo máximo paramétrico.

## 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y CONDICIONES DE FACTIBILIDAD

Sea la red dirigida  $G = [N, A]$  con conjunto de nodos  $N = \{1, \dots, n\}$  y conjunto de arcos  $A = \{(i, j) : i, j \in N\}$ . Para cada arco  $(i, j)$ , se definen una cota inferior paramétrica  $l_{ij}(\lambda) = a_{ij} + \lambda b_{ij}$  y una cota superior paramétrica  $c_{ij}(\lambda) = \bar{a}_{ij} + \lambda \bar{b}_{ij}$ .

El intervalo de variación del parámetro es tal que, para cada  $\lambda$ ,  $0 \leq l_{ij}(\lambda) \leq c_{ij}(\lambda)$ , para todo  $(i, j) \in A$ . Dicho intervalo se denotará por  $[\lambda_1, \lambda_2]$ .

### Definición 2.1

Un flujo paramétrico sobre el arco  $(i, j)$  es una función lineal a trozos  $f_{ij}(\lambda)$  definida en el intervalo  $[\lambda_1, \lambda_2]$ , tal que  $l_{ij}(\lambda) \leq f_{ij}(\lambda) \leq c_{ij}(\lambda)$ ,  $\forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ .

### Notación

Dados  $X, Y \subset N$ , denotaremos  $(X, Y) = \{(i, j) \in A : i \in X, j \in Y\}$ . Si sobre el conjunto de arcos  $A$  se tiene definida una función dependiente de un parámetro  $H_{ij}(\lambda)$ , denotaremos  $H(X, Y; \lambda) = \sum_{(i,j) \in (X,Y)} H_{ij}(\lambda)$ .

### Definición 2.2

Llamaremos circulación paramétrica en la red  $G$  a la función  $f: A \times [\lambda_1, \lambda_2] \rightarrow \mathbb{R}^+$  tal que a  $((i, j), \lambda)$  hace corresponder  $f_{ij}(\lambda)$ , de forma que se verifica, para cada  $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ ,

$$(2.1) \quad \sum_{(i,j) \in A} f_{ij}(\lambda) - \sum_{(j,i) \in A} f_{ji}(\lambda) = 0 \quad \forall i \in N$$

$$(2.2) \quad 0(\lambda) \leq l_{ij}(\lambda) \leq f_{ij}(\lambda) \leq c_{ij}(\lambda) \quad \forall (i, j) \in A$$

donde  $0(\lambda) = 0$ ,  $\forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ .

### Teorema 2.1

Una condición necesaria y suficiente para que exista una circulación paramétrica factible en el intervalo  $[\lambda_1, \lambda_2]$  es que  $\forall X \subset N$  y  $\forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$

$$(2.3) \quad c(X, \bar{X}; \lambda) \geq l(\bar{X}, X; \lambda)$$

### Demostración

Fijado  $\lambda^* \in [\lambda_1, \lambda_2]$ , la existencia de una circulación factible es equivalente a la existencia de un flujo de valor  $l(N, N; \lambda^*)$  en la red  $G' = [N', A']$ , donde  $N' = N \cup \{s, t\}$ ,  $A' = A \cup \{(s, i), i \in N\} \cup \{(i, t), i \in N\}$ , en la que hay definidas capacidades

$$c'_{ij} = \begin{cases} c_{ij}(\lambda^*) - l_{ij}(\lambda^*) & (i, j) \in A \\ l(N, j; \lambda^*) & i = s, j \in N \\ l(i, N; \lambda^*) & i \in N, j = t \end{cases}$$

Para ello, una condición necesaria y suficiente es que cualquier corte que separe  $s$  y  $t$  en la red  $G'$  tenga al menos capacidad  $l(N, N; \lambda^*)$ . Esto se transforma, véase Ford y Fulkerson (1962), en que una condición necesaria y suficiente para que exista una circulación factible con respecto a las cotas fijas  $l_{ij}(\lambda^*)$  y  $c_{ij}(\lambda^*)$  es que,  $\forall X \subset N$  se cumpla

$$c(X, \bar{X}; \lambda^*) \geq l(\bar{X}, X; \lambda^*)$$

En consecuencia, al variar  $\lambda^*$  se obtiene la condición (2.3). ■

Sean ahora 1 y  $n$  nodos distinguidos denominados nodo entrada y nodo salida de la red, respectivamente.

### Definición 2.3

Llamaremos flujo paramétrico de 1 a  $n$  en la red  $G$  a la función  $f: A \times [\lambda_1, \lambda_2] \rightarrow \mathbb{R}^+$  tal que a  $((i, j), \lambda)$  hace corresponder  $f_{ij}(\lambda)$ , de forma que se verifica, para cada  $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ ,

$$(2.4) \quad \sum_{(i,j) \in A} f_{ij}(\lambda) - \sum_{(j,i) \in A} f_{ji}(\lambda) = \begin{cases} v(\lambda) & i = 1 \\ 0 & i \neq 1, n \\ -v(\lambda) & i = n \end{cases}$$

$$(2.5) \quad 0(\lambda) \leq l_{ij}(\lambda) \leq f_{ij}(\lambda) \leq c_{ij}(\lambda) \quad \forall (i, j) \in A$$

La función lineal a trozos  $v(\lambda)$  recibe el nombre de valor del flujo paramétrico.

El problema de máximo flujo paramétrico consiste en encontrar un flujo paramétrico de valor  $v^*(\lambda)$  tal que  $v^*(\lambda) \geq v(\lambda), \forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$  y  $\forall v(\lambda)$  valor de un flujo paramétrico.

### Teorema 2.2

Una condición necesaria y suficiente para que exista un flujo paramétrico factible de 1 a  $n$  en el intervalo  $[\lambda_1, \lambda_2]$  es que  $\forall X \subset N$  tal que  $\{1, n\} \subset X$  ó  $\{1, n\} \subset \bar{X}$ , y  $\forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$

$$(2.6) \quad c(X, \bar{X}; \lambda) \geq l(\bar{X}, X; \lambda)$$

## Demostración

Considerando la red ampliada  $G^* = [N, A^*]$  en la que se han añadido los arcos  $(1, n)$  y  $(n, 1)$  con cotas inferior y superior  $0$  e  $\infty$ , respectivamente, es equivalente encontrar un flujo paramétrico factible de  $1$  a  $n$  en la red original y una circulación factible en la red ampliada. Aplicando el teorema 2.1, la condición (2.3) resulta trivial si  $1 \in X$  y  $n \in \overline{X}$ , o viceversa.

■

## 3. CONSTRUCCIÓN DE UNA CIRCULACIÓN FACTIBLE

El algoritmo que se describe a continuación para el cálculo de una circulación paramétrica factible consta de dos etapas, una de etiquetado de nodos y otra de cambio de flujo sobre los arcos de la red.

Cada nodo  $j$  que se etiqüete recibirá etiqüetas de la forma  $(p_j, i^+, q_i, \varepsilon_j(\lambda); I_j)$  ó  $(p_j, i^-, q_i, \varepsilon_j(\lambda); I_j)$ , donde  $p_j$  es un índice que permite numerar las sucesivas etiqüetas que se le asignan al nodo  $j$ ;  $i$  es el nodo, ya etiqüetado, desde el que se etiqüeta  $j$ ; el símbolo “+” indicará que se está utilizando el arco  $(i, j)$  para etiqüetar  $j$ , y el símbolo “-” que se utiliza el arco  $(j, i)$ ;  $q_i$  es el número de la etiqüeta del nodo  $i$  que se utiliza en el cálculo de la función  $\varepsilon_j(\lambda)$ ; y  $\varepsilon_j(\lambda)$  es una función que toma valor distinto de cero en un conjunto de puntos  $I_j \subset [\lambda_1, \lambda_2]$ , que se definirá posteriormente.

En un momento cualquiera del algoritmo, un nodo puede estar etiqüetado y completamente examinado (con todas sus etiqüetas examinadas), etiqüetado y no completamente examinado (alguna etiqüeta permanece sin examinar), y no etiqüetado.

El algoritmo puede comenzar con cualquier  $f$  que satisfaga las ecuaciones (2.1). En particular, podemos tomar  $f \equiv 0$ .

Se selecciona un arco  $(k, h)$  que no verifique las condiciones (2.2). En este caso, existen valores del parámetro  $\lambda$  tal que

- a)  $l_{kh}(\lambda) > f_{kh}(\lambda)$  ó
- b)  $f_{kh}(\lambda) > c_{kh}(\lambda)$ .

**Caso a):** Sea  $I^* = \{\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]: l_{kh}(\lambda) > f_{kh}(\lambda)\}$ . Se comienza asignando a  $h$  la etiqueta  $(1, k^+, \bullet, \varepsilon_h(\lambda); I_h)$  donde

$$\varepsilon_h(\lambda) = l_{kh}(\lambda) - f_{kh}(\lambda), \quad I_h = I^*$$

A continuación se trata de determinar una trayectoria desde  $h$  hasta  $k$  aplicando las reglas de etiquetado que se detallan más adelante. Si se consigue etiquetar el nodo  $k$  se detiene la rutina de etiquetado, se define  $\varepsilon_k(\lambda) = 0$  para  $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2] \setminus I_k$ , y se pasa a la etapa de cambio de flujo cuyas reglas se indican posteriormente. Tras completar dicha etapa, es decir, una vez llegados al nodo  $h$ , se suma  $\varepsilon_k(\lambda)$  al flujo que circula por el arco  $(k, h)$ .

**Caso b):** Sea  $I^* = \{\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]: f_{kh}(\lambda) > c_{kh}(\lambda)\}$ . Se comienza asignando a  $k$  la etiqueta  $(1, h^-, \bullet, \varepsilon_k(\lambda); I_k)$  donde

$$\varepsilon_k(\lambda) = f_{kh}(\lambda) - c_{kh}(\lambda), \quad I_k = I^*$$

A continuación se trata de determinar una trayectoria desde  $k$  hasta  $h$  aplicando las reglas de etiquetado. Si se logra etiquetar el nodo  $h$  se detiene la rutina de etiquetado, se define  $\varepsilon_h(\lambda) = 0$  para  $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2] \setminus I_h$ , y se pasa a la etapa de cambio de flujo, que se aplica intercambiando  $k$  por  $h$  y  $h$  por  $k$ . Tras completar dicha etapa, es decir, una vez llegados al nodo  $k$ , se resta  $\varepsilon_h(\lambda)$  al flujo que circula por el arco  $(k, h)$ .

El proceso se repite, borrando cada vez las etiquetas de los nodos, hasta que el arco  $(k, h)$  verifique las condiciones (2.2). Estas etapas se iteran hasta que todos los arcos cumplan dichas condiciones.

Si en el proceso de etiquetado existe algún conjunto  $I$  de valores de  $\lambda$  para el que es imposible llegar desde  $h$  hasta  $k$  (o desde  $k$  hasta  $h$ ), entonces, para todo  $\lambda \in I$ , no existe una circulación paramétrica factible. En efecto, sea  $X$  el conjunto de nodos  $i$  etiquetados en los que en alguna etiqueta  $I_i \supset I$ , entonces, por las reglas de etiquetado,

$$f_{ij}(\lambda) \geq c_{ij}(\lambda), \quad \forall (i, j) \in (X, \overline{X}) \quad \text{y} \quad f_{ji}(\lambda) \leq l_{ji}(\lambda), \quad \forall (j, i) \in (\overline{X}, X), \quad \lambda \in I$$

y además, para el arco  $(k, h)$  ó  $f_{kh}(\lambda) > c_{kh}(\lambda)$  ó  $f_{kh}(\lambda) < l_{kh}(\lambda)$ , en consecuencia

$$0 = f(X, \overline{X}; \lambda) - f(\overline{X}, X; \lambda) > c(X, \overline{X}; \lambda) - l(\overline{X}, X; \lambda), \quad \forall \lambda \in I$$

y en consecuencia se incumple la condición (2.3).

## Reglas de etiquetado

Sea  $i$  un nodo cualquiera etiquetado y con alguna etiqueta sin examinar. Sea ésta  $(p_i, g^\pm, q_g, \varepsilon_i(\lambda); I_i)$ , entonces

- (1) Se identifican todos los nodos  $j$  para los que existe  $I'$  tal que  $f_{ij}(\lambda) < c_{ij}(\lambda)$  con  $\lambda \in I'$  e  $I' \cap I_i \neq \emptyset$ . A estos nodos se les asigna la etiqueta

$$(p_j, i^+, q_i, \varepsilon_j(\lambda); I_j = I' \cap I_i)$$

donde  $p_j$  es 1 si es la primera etiqueta de ese nodo, si hay más etiquetas se incrementa en una unidad el índice de la última;  $q_i$  es el índice  $p_i$  de la etiqueta que se está examinando, cuyo  $\varepsilon_i(\lambda)$  se utiliza en el cálculo de la función  $\varepsilon_j(\lambda)$ ; y  $\varepsilon_j(\lambda) = \min\{\varepsilon_i(\lambda), c_{ij}(\lambda) - f_{ij}(\lambda)\}$  calculado para  $\lambda \in I' \cap I_i$ .

- (2) Se identifican todos los nodos  $j$  para los que existe  $I'$  tal que  $f_{ji}(\lambda) > l_{ji}(\lambda)$  con  $\lambda \in I'$  e  $I' \cap I_i \neq \emptyset$ . A estos nodos se les asigna la etiqueta

$$(p_j, i^-, q_i, \varepsilon_j(\lambda); I_j = I' \cap I_i)$$

donde  $p_j$  y  $q_i$  están definidos como en (1), y  $\varepsilon_j(\lambda) = \min\{\varepsilon_i(\lambda), f_{ji}(\lambda) - l_{ji}(\lambda)\}$  calculado para  $\lambda \in I' \cap I_i$ .

Si al tratar de asignar una etiqueta al nodo  $j$ , el conjunto  $I_j$  que se construye está incluido en el correspondiente conjunto de otra etiqueta de dicho nodo, el etiquetado no se realiza.

Este proceso se repite con todas las etiquetas del nodo  $i$  que en ese momento estén sin examinar. Al finalizar, el nodo  $i$  pasa a estar etiquetado y completamente examinado. Si eventualmente el nodo  $i$  recibe alguna nueva etiqueta, su situación cambiará a etiquetado y no completamente examinado.

Se elige un nuevo nodo no completamente examinado y se repite el proceso.

## Reglas para el cambio de flujo

En esta etapa el nodo  $k$  estará etiquetado.

Si la etiqueta del nodo  $k$  es de la forma  $(1, j^+, q_j, \varepsilon_k(\lambda); I_k)$ , sustituimos  $f_{jk}(\lambda)$  por  $f_{jk}(\lambda) + \varepsilon_k(\lambda)$ .

Sea el nodo  $j$ , seleccionamos la etiqueta cuyo índice  $p_j$  coincide con el valor  $q_j$  de la etiqueta del nodo  $k$ . Aquella podrá ser alguna de las siguientes:



$$a') (p_j, i^+, q_i, \varepsilon_j(\lambda); I_j)$$

$$b') (p_j, i^-, q_i, \varepsilon_j(\lambda); I_j)$$

En el caso a') sustituimos  $f_{ij}(\lambda)$  por  $f_{ij}(\lambda) + \varepsilon_k(\lambda)$ . En el caso b') sustituimos  $f_{ji}(\lambda)$  por  $f_{ji}(\lambda) - \varepsilon_k(\lambda)$ . Se pasa al nodo  $i$  y se le aplica el mismo procedimiento, hasta llegar al nodo  $h$ . Una vez alcanzado el nodo  $h$  se vuelve al procedimiento general.

Si la etiqueta asignada al nodo  $k$  fue  $(1, j^-, q_j, \varepsilon_k(\lambda); I_k)$ , sustituimos  $f_{kj}(\lambda)$  por  $f_{kj}(\lambda) - \varepsilon_k(\lambda)$ . Se selecciona el nodo  $j$  y se repite el proceso anterior.

#### 4. CARACTERIZACIÓN DE UN FLUJO PARAMÉTRICO MÁXIMO

En lo que sigue consideraremos como intervalo de variación del parámetro aquel intervalo  $[\lambda_1, \lambda_2]$ , no vacío, para el que el problema planteado tenga solución factible.

##### Definición 4.1

Un  $m$ -corte es un conjunto de  $m$  cortes que separan 1 y  $n$ ,  $(X_1, \bar{X}_1), \dots, (X_m, \bar{X}_m)$ , cada uno de los cuales tiene asociado un conjunto de valores del parámetro,  $I_1, \dots, I_m$ , que forman una partición del intervalo  $[\lambda_1, \lambda_2]$ .

El  $m$ -corte se denotará por  $\mathbf{X} = ((X_1, \bar{X}_1), \dots, (X_m, \bar{X}_m); I_1, \dots, I_m)$ .

Denotando  $\mathbf{1}_A(\bullet)$  la función indicador del conjunto  $A$ , se define la capacidad del  $m$ -corte como la función lineal a trozos:

$$\begin{aligned} C(\lambda) &= \sum_{r=1}^m (c(X_r, \bar{X}_r; \lambda) - l(\bar{X}_r, X_r; \lambda)) \mathbf{1}_{I_r}(\lambda) = \\ &= \sum_{r=1}^m \left( \sum_{(i,j) \in (X_r, \bar{X}_r)} c_{ij}(\lambda) - \sum_{(j,i) \in (\bar{X}_r, X_r)} l_{ji}(\lambda) \right) \mathbf{1}_{I_r}(\lambda) \end{aligned}$$

### Lema

Para cualquier  $m$ -corte  $X$ , de capacidad  $C(\lambda)$ , y cualquier flujo paramétrico factible de 1 a  $n$ ,  $f$ , de valor  $v(\lambda)$  se verifica:

$$v(\lambda) \leq C(\lambda), \quad \forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$$

### Demostración

Sea  $\lambda^* \in [\lambda_1, \lambda_2]$  cualquiera, pero fijo. Sea  $r$  el índice tal que  $\lambda^* \in I_r$ . Como  $(X_r, \bar{X}_r)$  es un corte que separa 1 y  $n$ , puede escribirse:

$$\begin{aligned} v(\lambda^*) = f(X_r, \bar{X}_r; \lambda^*) &- f(\bar{X}_r, X_r; \lambda^*) \leq \\ &\leq c(X_r, \bar{X}_r; \lambda^*) - l(\bar{X}_r, X_r; \lambda^*) = C(\lambda^*) \end{aligned}$$

Luego

$$v(\lambda) \leq C(\lambda), \quad \forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2].$$

■

### Teorema 4.1: Teorema del flujo paramétrico máximo - mínimo $m$ -corte.

El flujo paramétrico  $f$ , de valor  $v(\lambda)$ , es un flujo paramétrico máximo si y sólo si existen  $m$  y un  $m$ -corte asociado, de capacidad  $C(\lambda)$ , tal que

$$(4.1) \quad v(\lambda) = C(\lambda), \quad \forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$$

### Demostración

Para demostrar la suficiencia, basta considerar que si  $v(\lambda) = C(\lambda)$ ,  $\forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ , por el lema anterior este flujo paramétrico alcanza el máximo valor posible, luego será un flujo paramétrico máximo.

Sea ahora un flujo paramétrico máximo  $f$  de valor  $v(\lambda)$ . Construimos iterativamente un  $m$ -corte siguiendo el algoritmo cuya descripción de alto nivel se da en la tabla 1. En él, se subdivide iterativamente el intervalo  $[\lambda_1, \lambda_2]$  en subconjuntos  $I_r$  para los que se toma  $X_r$  como el conjunto de los nodos a los que se puede llegar desde el nodo 1 por trayectorias que incluyen arcos  $(i, j)$  para los que  $f_{ij}(\lambda) < c_{ij}(\lambda)$  ó  $f_{ij}(\lambda) > l_{ij}(\lambda)$ ,  $\lambda \in I_r$ .

Comprobemos que efectivamente es un  $m$ -corte. La construcción por divisiones sucesivas garantiza que  $\{I_r, r = 1, \dots, m\}$  es una partición. Además, cada

par  $(X_r, \overline{X}_r)$  es un corte que separa 1 y  $n$ . En efecto, por construcción,  $1 \in X_r$ ; supongamos que  $n \notin \overline{X}_r$ . Existiría entonces una trayectoria de 1 a  $n$ , con todos sus nodos en  $X_r$ , tal que sobre los arcos hacia adelante,  $(i, j)$ , de la trayectoria se cumple  $f_{ij}(\lambda) < c_{ij}(\lambda)$  y sobre los arcos hacia atrás,  $(j, i)$ ,  $f_{ji}(\lambda) > l_{ji}(\lambda)$  para cada  $\lambda \in I_r$ .

Se calculan entonces, para  $\lambda \in I_r$ , las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(\lambda) &= \min(c_{ij}(\lambda) - f_{ij}(\lambda)) \quad \text{sobre los arcos hacia adelante de la trayectoria} \\ \varepsilon_2(\lambda) &= \min(f_{ji}(\lambda) - l_{ji}(\lambda)) \quad \text{sobre los arcos hacia atrás de la trayectoria} \end{aligned}$$

$$\text{Sea } \varepsilon(\lambda) = \begin{cases} \min\{\varepsilon_1(\lambda), \varepsilon_2(\lambda)\} & \lambda \in I_r \\ 0 & \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2] \setminus I_r \end{cases}$$

Construimos un nuevo flujo paramétrico  $f^*$  que coincide con  $f$  en los arcos no incluidos en la trayectoria, que toma valor  $f_{ij}(\lambda) + \varepsilon(\lambda)$  en los arcos hacia adelante de la trayectoria y valor  $f_{ji}(\lambda) - \varepsilon(\lambda)$  en los arcos hacia atrás.

Puede comprobarse sin dificultad que  $f^*$  verifica las condiciones (2.4) y (2.5), y el valor del flujo es  $v^*(\lambda) = v(\lambda) + \varepsilon(\lambda)$ . Además, para  $\lambda \in I_r$ ,  $\varepsilon(\lambda) > 0$ , por tanto  $v^*(\lambda) > v(\lambda)$ , en contra de la hipótesis de que  $f$  era un flujo paramétrico máximo. En consecuencia,  $n \in \overline{X}_r$ , para todo  $r$ , y  $\mathbf{X} = ((X_1, \overline{X}_1), \dots, (X_m, \overline{X}_m); I_1, \dots, I_m)$  es un  $m$ -corte.

Notemos que, una vez construido el  $m$ -corte:

$$\begin{aligned} f(X_r, \overline{X}_r; \lambda) &= c(X_r, \overline{X}_r; \lambda) \quad \text{y} \quad f(\overline{X}_r, X_r; \lambda) = l(\overline{X}_r, X_r; \lambda), \quad \lambda \in I_r, \\ & \qquad \qquad \qquad r = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

En efecto, supongamos que  $f(X_r, \overline{X}_r; \lambda) < c(X_r, \overline{X}_r; \lambda)$  para algún  $r$  y para todo  $\lambda \in I'$  con  $I' \subset I_r$ . Entonces existe al menos un arco  $(i, j)$  tal que  $i \in X_r, j \in \overline{X}_r$  y  $f_{ij}(\lambda) < c_{ij}(\lambda), \lambda \in I'$ . Por construcción de  $X_r$  dicha situación daría lugar a que  $j$  perteneciera a  $X_r$  o a la formación de un nuevo  $X_s$  tal que  $X_s = X_r \cup \{j\}, I_s = I'$  y  $I_r = I_r \setminus I'$ , y el algoritmo iteraría de nuevo, en contra de la hipótesis de que el algoritmo ha terminado.

De manera análoga se prueba que  $f(\overline{X}_r, X_r; \lambda) = l(\overline{X}_r, X_r; \lambda), \lambda \in I_r, r = 1, \dots, m$ . En consecuencia,

$$\begin{aligned} v(\lambda) &= f(X_r, \overline{X}_r; \lambda) - f(\overline{X}_r, X_r; \lambda) = c(X_r, \overline{X}_r; \lambda) - l(\overline{X}_r, X_r; \lambda), \quad \lambda \in I_r, \\ & \qquad \qquad \qquad r = 1, \dots, m \end{aligned}$$

y por tanto para el  $m$ -corte construido  $v(\lambda) = \mathbf{C}(\lambda), \forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ . ■

**Tabla 1**  
Rutina de construcción del  $m$ -corte mínimo.

```

 $m = 1$   $X_1 = \{1\}$   $I_1 = [\lambda_1, \lambda_2]$   $r = 1$ 
MIENTRAS ( $r \leq m$ )
PRINCIPIO
  MIENTRAS ( $i \in X_r$ . AND.  $j \notin X_r$ . AND.  $(i, j) \in A$ )
  PRINCIPIO
     $I' = \{\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]: f_{ij}(\lambda) < c_{ij}(\lambda)\}$ 
    SI ( $I' \neq \emptyset$ )
    PRINCIPIO
       $I' = I' \cap I_r$ 
      SI ( $I' \subset I_r$ )/ *  $\subset$  Indica contenido estricto */
      PRINCIPIO
         $m = m + 1$   $X_m = X_r \cup \{j\}$ 
         $I_m = I'$      $I_r = I_r \setminus I_m$ 
      FIN
      SI ( $I_r \equiv I'$ )
      PRINCIPIO
         $X_r = X_r \cup \{j\}$ 
      FIN
    FIN
  FIN /* Fmientras */
  MIENTRAS ( $i \in X_r$ . AND.  $j \notin X_r$ . AND.  $(j, i) \in A$ )
  PRINCIPIO
     $I' = \{\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]: f_{ji}(\lambda) > l_{ji}(\lambda)\}$ 
    SI ( $I' \neq \emptyset$ )
    PRINCIPIO
       $I' = I' \cap I_r$ 
      SI ( $I' \subset I_r$ )/ *  $\subset$  Indica contenido estricto */
      PRINCIPIO
         $m = m + 1$   $X_m = X_r \cup \{j\}$ 
         $I_m = I'$      $I_r = I_r \setminus I_m$ 
      FIN
      SI ( $I_r \equiv I'$ )
      PRINCIPIO
         $X_r = X_r \cup \{j\}$ 
      FIN
    FIN
  FIN /* Fmientras */
   $r = r + 1$ 
FIN /* Fmientras */

```

## 5. CONSTRUCCIÓN DE UN FLUJO PARAMÉTRICO MÁXIMO

El algoritmo que se propone está basado en una técnica de etiquetado semejante a la presentada en la sección 3. El procedimiento empieza con un flujo paramétrico factible  $f$ .

### Etapa de etiquetado

El nodo 1 se etiqueta siempre como  $(1, \bullet, \bullet, \infty; [\lambda_1, \lambda_2])$ ; en este momento el nodo 1 está etiquetado y sin examinar, el resto de los nodos está no etiquetado.

Sea  $i$  un nodo cualquiera etiquetado y con alguna etiqueta sin examinar. Sea ésta  $(p_i, g^\pm, q_i, \varepsilon_i(\lambda); I_i)$ . Se aplican a este nodo las reglas de etiquetado desarrolladas en la sección 3. Se repite el proceso hasta que se etiqueta el nodo  $n$  o hasta que no se pueden asignar más etiquetas y el nodo  $n$  no está etiquetado.

Si se consigue etiquetar el nodo  $n$  se detiene la rutina de etiquetado y se pasa a la etapa de cambio de flujo. Si no se puede etiquetar el nodo  $n$ , el algoritmo ha finalizado y el flujo paramétrico actual será un flujo paramétrico máximo.

En efecto, basta considerar el  $m$ -corte cuyos conjuntos  $I_1, \dots, I_m$  son los que aparecen en la definición del flujo paramétrico actual. Fijado  $I_r$ , el conjunto  $X_r$  es el conjunto de nodos etiquetados cuya etiqueta tiene como quinto parámetro un conjunto que contiene a  $I_r$ . Este  $m$ -corte verifica la condición (4.1) luego el flujo es óptimo.

### Etapa de cambio de flujo

En esta etapa, el nodo  $n$  estará etiquetado. Definimos  $\varepsilon_n(\lambda) = 0$  para  $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2] \setminus I_n$ .

Si la etiqueta es de la forma  $(1, j^+, q_j, \varepsilon_n(\lambda); I_n)$ , sustituimos  $f_{jn}(\lambda)$  por  $f_{jn}(\lambda) + \varepsilon_n(\lambda)$ . Sea el nodo  $j$ , seleccionamos la etiqueta cuyo índice  $p_j$  coincide con el valor  $q_j$  de la etiqueta del nodo  $n$ . Ésta podrá ser de la forma:

a)  $(p_j, i^+, q_i, \varepsilon_j(\lambda); I_j)$

b)  $(p_j, i^-, q_i, \varepsilon_j(\lambda); I_j)$

En el caso a) sustituimos  $f_{ij}(\lambda)$  por  $f_{ij}(\lambda) + \varepsilon_n(\lambda)$ . En el caso b) sustituimos  $f_{ji}(\lambda)$  por  $f_{ji}(\lambda) - \varepsilon_n(\lambda)$ . Se pasa al nodo  $i$  y se le aplica el mismo procedimiento, hasta llegar al nodo 1. En este momento se borran las etiquetas y se repite el proceso de etiquetado.

Si la etiqueta asignada al nodo  $n$  fue  $(1, j^-, q_j, \varepsilon_n(\lambda); I_n)$ , sustituimos  $f_{nj}(\lambda)$  por  $f_{nj}(\lambda) - \varepsilon_n(\lambda)$ . Se selecciona el nodo  $j$  y se repite el proceso anterior.

### Observación 5.1

El flujo paramétrico factible con el que comenzar este procedimiento puede obtenerse aplicando el algoritmo de la sección 3 a la red ampliada  $G^* = [N, A^*]$  en la que se han añadido los arcos  $(1, n)$  y  $(n, 1)$  con cotas inferior y superior 0 e  $\infty$ , respectivamente.

### Observación 5.2

Una vez finalizado el algoritmo, el  $m$ -corte asociado al flujo paramétrico máximo se calcula de manera inmediata. El número de conjuntos  $I_i$  que forman la partición del intervalo en el que existe solución es  $m$ . A cada uno de estos  $I_i$  se le asocia el conjunto  $X_i$  formado por los nodos en alguna de cuyas etiquetas figure un conjunto que contenga a  $I_i$ .

## Complejidad computacional

El algoritmo de etiquetado propuesto está basado en la búsqueda de trayectorias que aumentan el flujo. Considerando que los sucesivos etiquetados se realizan siguiendo la regla “examinar las etiquetas de los nodos en el orden en el que se asignaron”, puede realizarse un razonamiento semejante al presentado por Edmonds y Karp (1973), identificando junto con los arcos embotellados el conjunto de valores de  $\lambda$  para el que se produce el embotellamiento. Así, el número de trayectorias de aumento de flujo queda acotado, en el peor caso, por  $O(\tau mn)$ , siendo  $\tau$  el número de puntos de ruptura,  $m$  el número de arcos y  $n$  el número de nodos.

La complejidad para la fase de etiquetado tiene orden  $O(\tau^2 n^2)$ , en el caso más desfavorable, con tal que se garantice que el número de etiquetas de cada nodo no es mayor que  $\tau$ . Esto puede conseguirse sin más que asignar las etiquetas de un nodo cualquiera de forma que los sucesivos conjuntos  $I_i$  sean disjuntos. Para ello basta tomar como conjunto  $I_i$  de la última etiqueta que se asigna la diferencia entre el conjunto que se asignaría y la unión de los conjuntos  $I_i$  de las etiquetas previamente asignadas.

En conjunto, la complejidad global es, por tanto, de orden  $O(\tau^3 mn^3)$ .

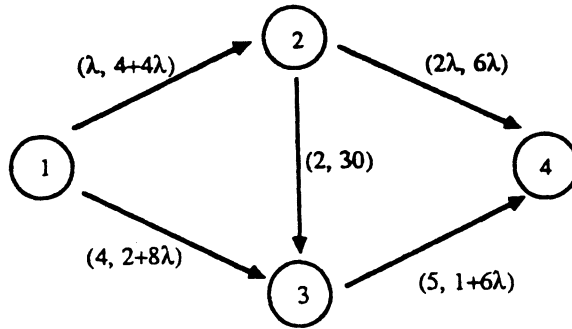
## 6. CASO ILUSTRATIVO

En este apartado se obtiene el flujo paramétrico máximo para el problema mostrado en el figura 2. Las expresiones sobre los arcos indican las capacidades inferior y superior, respectivamente.

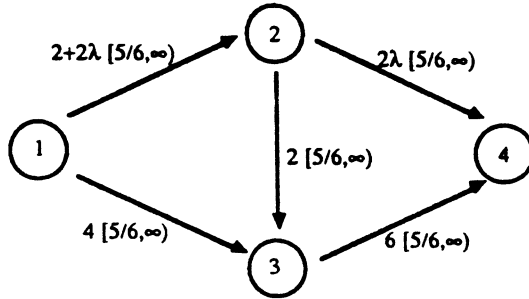
El intervalo inicial de variación del parámetro es  $[2/3, \infty)$ . Para el cálculo de un flujo paramétrico inicial aplicamos el algoritmo desarrollado en la sección 3. Se introducen los arcos  $(1,4)$  y  $(4,1)$  con cotas cero e infinito, y comenzamos con flujo cero sobre todos los arcos. En la tabla 2 se muestran los etiquetados de las distintas etapas del algoritmo, así como el flujo sobre los arcos resultantes de dichas etapas. En la iteración 4 se observa que sólo puede etiquetarse el nodo 3, por tanto en el intervalo  $[2/3, 5/6)$  el problema no tiene solución factible, por lo que se elimina del estudio. Para dicho intervalo el conjunto  $X = \{3\}$  no verifica la condición (2.6). La figura 3 muestra el flujo factible inicial con el que comenzamos el algoritmo desarrollado en la sección 5. La tabla 3 muestra los sucesivos etiquetados y flujos. Puesto que en la iteración 3 no puede etiquetarse el nodo 4, el flujo máximo es el flujo obtenido en la iteración 2, que se muestra en la figura 4. El 2-corte paramétrico será  $X = ((X_1, \bar{X}_1), (X_2, \bar{X}_2); I_1, I_2)$ , donde

$$X_1 = \{1, 2, 3\} \quad I_1 = [5/6, 1)$$

$$X_2 = \{1, 3\} \quad I_2 = [1, \infty)$$

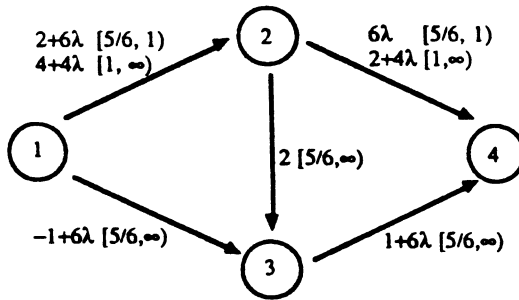


**Figura 2.**  
Cotas inferiores y superiores.



**Figura 3.**

Flujo inicial.



**Figura 4.**

Flujo paramétrico máximo.



**Tabla 2**  
**Construcción de un flujo paramétrico factible.**

Etapa	Arco seleccionado	Etiqueta	Flujo resultante
1	(1, 2)	1: (1, 4+, 1, $\lambda$ ; [2/3, $\infty$ ))	(1, 2): $\lambda$ ; [2/3, $\infty$ )
		2: (1, 1+, $\circ$ , $\lambda$ ; [2/3, $\infty$ ))	(1, 3): 0; [2/3, $\infty$ )
		3: (1, 2+, 1, $\frac{\lambda}{30}$ [2/3, 30) , [30, $\infty$ ) , [2/3, $\infty$ ))	(1, 4): 0; [2/3, $\infty$ )
		4: (1, 2+, 1, $\lambda$ ; [2/3, $\infty$ ))	(2, 3): 0; [2/3, $\infty$ )
			(2, 4): $\lambda$ ; [2/3, $\infty$ )
			(3, 4): 0; [2/3, $\infty$ )
			(4, 1): $\lambda$ ; [2/3, $\infty$ )
		2	(1, 3)
3: (1, 1+, $\circ$ , 4; [2/3, $\infty$ ))	(1, 3): 4; [2/3, $\infty$ )		
4: (1, 3+, 1, 4; [2/3, $\infty$ ))	(1, 4): 0; [2/3, $\infty$ )		
	(2, 3): 0; [2/3, $\infty$ )		
	(2, 4): $\lambda$ ; [2/3, $\infty$ )		
	(3, 4): 4; [2/3, $\infty$ )		
	(4, 1): $4+\lambda$ ; [2/3, $\infty$ )		
3	(2, 3)		
		2: (1, 1+, 1, $\frac{6\lambda-3}{2}$ [2/3, 5/6) , [5/6, $\infty$ ) , [2/3, $\infty$ ))	(1, 3): 4; [2/3, $\infty$ )
		3: (1, 2+, $\circ$ , 2; [2/3, $\infty$ ))	(1, 4): 0; [2/3, $\infty$ )
		4: (1, 3+, 1, $\frac{6\lambda-3}{2}$ [2/3, 5/6) , [5/6, $\infty$ ) , [2/3, $\infty$ ))	(2, 3): $\frac{6\lambda-3}{2}$ [2/3, 5/6) [5/6, $\infty$ )
			(2, 4): $\lambda$ ; [2/3, $\infty$ )
			(3, 4): $\frac{6\lambda+1}{6}$ [2/3, 5/6) [5/6, $\infty$ )
			(4, 1): $\frac{7\lambda+1}{6+\lambda}$ [2/3, 5/6) [5/6, $\infty$ )
		4	(2, 3)
	(1, 3): 4; [5/6, $\infty$ )		
	(1, 4): 0; [5/6, $\infty$ )		
	(2, 3): 2; [5/6, $\infty$ )		
	(2, 4): $\lambda$ ; [5/6, $\infty$ )		
	(3, 4): 6; [5/6, $\infty$ )		
	(4, 1): $6+\lambda$ ; [5/6, $\infty$ )		
5	(2, 4)		
		2: (1, 1+, 1, $\lambda$ ; [5/6, $\infty$ ))	(1, 3): 4; [5/6, $\infty$ )
		3: (1, 4-, 1, $\frac{\lambda}{1}$ [5/6, 1) , [1, $\infty$ ) , [5/6, $\infty$ ))	(1, 4): 0; [5/6, $\infty$ )
		4: (1, 2+, $\circ$ , $\lambda$ ; [5/6, $\infty$ ))	(2, 3): 2; [5/6, $\infty$ )
			(2, 4): $2\lambda$ ; [5/6, $\infty$ )
			(3, 4): 6; [5/6, $\infty$ )
			(4, 1): $6+2\lambda$ ; [5/6, $\infty$ )

**Tabla 3**  
 Construcción de un flujo paramétrico máximo.

Etapa	Etiqueta	Flujo resultante
1	1: (1, •, •, ∞; [5/6, ∞))	(1, 2): $2+6\lambda$ [5/6, 1) $4+4\lambda$ [1, ∞)
	2: (1, 1+, 1, 2+2λ; [5/6, ∞))	(1, 3): 4; [5/6, ∞)
	3: (1, 1+, 1, -2+8λ, [5/6, ∞))	(2, 3): 2; [5/6, ∞)
	4: (1, 2+, 1, $\frac{4\lambda}{2+2\lambda}$ [5/6, 1) ; [5/6, ∞))	(2, 4): $6\lambda$ [5/6, 1) $2+4\lambda$ [1, ∞)
		(3, 4): 6; [5/6, ∞)
2	1: (1, •, •, ∞; [5/6, ∞))	(1, 2): $2+6\lambda$ [5/6, 1) $4+4\lambda$ [1, ∞)
	2: (1, 1+, 1, 2-2λ; [5/6, 1))	(1, 3): -1+6λ; [5/6, ∞)
	3: (1, 1+, 1, -2+8λ; [5/6, ∞))	(2, 3): 2; [5/6, ∞)
	4: (1, 3+, 1, -5+6λ; [5/6, ∞))	(2, 4): $6\lambda$ [5/6, 1) $2+4\lambda$ [1, ∞)
		(3, 4): 1+6λ; [5/6, ∞)
3	1: (1, •, •, ∞; [5/6, ∞))	
	2: (1, 1+, 1, 2-2λ; [5/6, 1))	
	3: (1, 1+, 1, 3+2λ; [5/6, ∞))	

## 7. CONCLUSIONES

Se han obtenido condiciones necesarias y suficientes para la caracterización de circulaciones factibles y de flujo máximo cuando en la red las cotas inferiores y superiores sobre los arcos son funciones lineales de un parámetro.

Se han propuesto algoritmos de etiquetado para la construcción de dichas circulaciones factibles y flujo máximo.

Tales algoritmos tienen una complejidad de orden  $O(\tau^3 mn^3)$ . El algoritmo básico puede modificarse con objeto de mejorar su complejidad. En este sentido, se están considerando modificaciones en la fase de etiquetado que permitan asignar una única etiqueta por nodo, rebajando así la complejidad asociada a la fase de etiquetado a un orden  $O(\tau^2 mn^3)$ .

## 8. REFERENCIAS

- [1] Ford, L.R. y Fulkerson, D.R. (1962). *Flows in Networks*, Princeton, Princeton University Press.
- [2] Gal, T. (1979). *Postoptimal Analyses, Parametric Programming, and Related Topics*, New York, McGraw-Hill.
- [3] Hamacher, H.W. y Foulds, L.R. (1989). "Algorithms for Flows with Parametric Capacities". *ZOR, Methods and Models of Operations Research*, **33**, 21-37.
- [4] Ruhe, G. (1985). "Characterization of all optimal solutions and parametric maximal flows in networks". *Optimization*, **16**, 51-61.
- [5] Edmonds, J. y Karp, R.M. (1972). "Theoretical Improvements in Algorithmic Efficiency for Network Flow Problems". *Journal of the ACM*, **19**, 248-264.

## ENGLISH SUMMARY:

### CIRCULATIONS AND MAXIMUM FLOW WITH PARAMETRIC BOUNDS

H.I. Calvete and P. Mateo

## 1. INTRODUCTION

In parametric programming the behavior of the objective function and optimal solutions in dependence of modifications in the problem data are investigated. Being the problem  $\text{Max } Z = c^T x$  subject to  $\{Ax = b(\lambda), x \geq 0, \lambda \in [0, \Lambda]\}$ , from parametric linear programming, it is well known that  $Z_{\max}(\lambda)$  is a piecewise linear continuous and concave function. Moreover, given two breakpoints  $\lambda_k < \lambda_{k+1}$  and an optimal solution  $x^*$  for  $\lambda^*$ ,  $\lambda_k < \lambda^* < \lambda_{k+1}$ ,  $x^*$  is optimal over the whole closed interval  $[\lambda_k, \lambda_{k+1}]$  (see Gal (1979)).

Ruhe (1985) and Hamacher and Foulds (1989) apply two different approaches to the parametric maximum flow problem, usually called horizontal and vertical approach, respectively. These approaches are illustrated in Figure 1. The thick line shows the function  $Z(\lambda)$ , which approximates  $Z_{\max}(\lambda)$ , after two iterations. The arrow points out the direction in the algorithm progression.

In this paper, we study the problem of getting circulations and maximum flow on networks with lower and upper bounds when these bounds are parametric linear functions. The existence of parametric circulations and feasible parametric flows are characterized. Necessary and sufficient conditions for the optimality of parametric flows are provided. Finally, algorithms based on labeling techniques for their computation are proposed. These algorithms follow the approach of Hamacher and Foulds.

## 2. PROBLEM FORMULATION AND FEASIBILITY THEOREMS

Let  $G = [N, A]$  be a directed network, consisting of a collection of nodes  $N = \{1, \dots, n\}$  together with a set of arcs  $A = \{(i, j): 1, j \in N\}$ . Suppose that each arc  $(i, j)$  has associated with it a lower parametric bound  $l_{ij}(\lambda) = a_{ij} + \lambda b_{ij}$  and an upper parametric bound  $c_{ij}(\lambda) = \bar{a}_{ij} + \lambda \bar{b}_{ij}$ . The range of  $\lambda$  is given by the interval  $[\lambda_1, \lambda_2]$  in which  $0 \leq l_{ij}(\lambda) \leq c_{ij}(\lambda), \forall (i, j) \in A$ .

### Definition 2.1

A parametric flow on arc  $(i, j)$  is a piecewise linear function  $f_{ij}(\lambda)$  defined on  $[\lambda_1, \lambda_2]$ , such that  $l_{ij}(\lambda) \leq f_{ij}(\lambda) \leq c_{ij}(\lambda), \forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ .

### Definition 2.2

A parametric circulation in the network  $G$  is a function  $f: A \times [\lambda_1, \lambda_2] \rightarrow \mathbb{R}^+$  mapping  $((i, j), \lambda)$  into  $f_{ij}(\lambda)$ , that verifies for each  $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ ,

$$(2.1) \quad \sum_{(i,j) \in A} f_{ij}(\lambda) - \sum_{(j,i) \in A} f_{ji}(\lambda) = 0 \quad \forall i \in N$$

$$(2.2) \quad 0(\lambda) \leq l_{ij}(\lambda) \leq f_{ij}(\lambda) \leq c_{ij}(\lambda) \quad \forall (i, j) \in A$$

where  $0(\lambda) = 0, \forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ .

### Theorem 2.1

A necessary and sufficient condition for a parametric circulation on  $[\lambda_1, \lambda_2]$  to exist is that

$$(2.3) \quad c(X, \bar{X}; \lambda) \geq l(\bar{X}, X; \lambda)$$

hold  $\forall X \subset N$  and  $\forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ .

### Definition 2.3

Let 1 and  $n$  be two distinguished nodes of  $N$ . A parametric flow from 1 to  $n$  in  $G$  is a function  $f: A \times [\lambda_1, \lambda_2] \rightarrow \mathbb{R}^+$  satisfying,  $\forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ ,

$$(2.4) \quad \sum_{(i,j) \in A} f_{ij}(\lambda) - \sum_{(j,i) \in A} f_{ji}(\lambda) = \begin{cases} v(\lambda) & i = 1 \\ 0 & i \neq 1, n \\ -v(\lambda) & i = n \end{cases}$$

$$(2.5) \quad 0(\lambda) \leq l_{ij}(\lambda) \leq f_{ij}(\lambda) \leq c_{ij}(\lambda) \quad \forall (i, j) \in A$$

The piecewise linear function  $v(\lambda)$  is the value function of parametric flow  $f$ .

The maximum parametric flow problem is to find a parametric flow with value  $v^*(\lambda)$  such that  $v^*(\lambda) \geq v(\lambda), \forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$  and  $\forall v(\lambda)$  value function of a parametric flow.

### Theorem 2.2

A necessary and sufficient condition for a feasible parametric flow from 1 to  $n$  on  $[\lambda_1, \lambda_2]$  to exist is that

$$(2.6) \quad c(X, \bar{X}; \lambda) \geq l(\bar{X}, X; \lambda)$$

hold  $\forall X \subset N$  such that either  $\{1, n\} \subset X$  or  $\{1, n\} \subset \bar{X}$ , and  $\forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ .

## 3. CONSTRUCTION OF A FEASIBLE CIRCULATION

The algorithm consists of two stages: a labeling process and a flow change. The computation progresses by a sequence of such stages until it terminates either constructing a feasible circulation or proving that there is no feasible circulation.

The algorithm may be started with any  $f$  that satisfies the equations (2.1), say  $f \equiv 0$ . We proceed to assign labels to nodes  $j$  of the network, a label having one of the two forms  $(p_j, i^+, q_i, \varepsilon_j(\lambda); I_j)$  or  $(p_j, i^-, q_i, \varepsilon_j(\lambda); I_j)$ , where  $p_j$  is an index which numbers the successive labels of node  $j$ ;  $i$  is the labeled node from  $j$  is labeled; the sign “+” indicates that the arc  $(i, j)$  is used to label  $j$ , and the sign “-” indicates that the arc used is  $(j, i)$ ;  $q_i$  is the number of node  $i$  label used to evaluate the function  $\varepsilon_j(\lambda)$ ; and, finally,  $\varepsilon_j(\lambda)$  is a function not null over a set  $I_j \subset [\lambda_1, \lambda_2]$ , to be defined later.

During the algorithm a node is considered to be in one of the three states: labeled and completely scanned, labeled and not completely scanned, and unlabeled.

Let be  $(k, h)$  an arc for which one of the bound conditions (2.2) is violated. Then, there are values of the parameter  $\lambda$  such that, either

a)  $l_{kh}(\lambda) > f_{kh}(\lambda)$  or

b)  $f_{kh}(\lambda) > c_{kh}(\lambda)$ .

**Case a):** Let  $I^* = \{\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]: l_{kh}(\lambda) > f_{kh}(\lambda)\}$ . Start a labeling process assigning to node  $h$  the label  $(1, k^+, \bullet, \varepsilon_h(\lambda); I_h)$  where

$$\varepsilon_h(\lambda) = l_{kh}(\lambda) - f_{kh}(\lambda), \quad I_h = I^*$$

Then, search for a path from  $h$  to  $k$  using the labeling rules. If node  $k$  is labeled, stop the labeling process, set  $\varepsilon_k(\lambda) = 0$  for  $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2] \setminus I_k$ , and go to the flow change rules.

Having finished the flow change process, namely, when  $h$  has been reached, add  $\varepsilon_k(\lambda)$  to the flow on the arc  $(k, h)$ .

**Case b):** Let  $I^* = \{\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]: f_{kh}(\lambda) > c_{kh}(\lambda)\}$ . Start a labeling process assigning to node  $k$  the label  $(1, h^-, \bullet, \varepsilon_k(\lambda); I_k)$  where

$$\varepsilon_k(\lambda) = f_{kh}(\lambda) - c_{kh}(\lambda), \quad I_k = I^*$$

Then, search for a path from  $k$  to  $h$  using the labeling rules. If node  $h$  is labeled, stop the labeling process, set  $\varepsilon_h(\lambda) = 0$  for  $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2] \setminus I_h$ , and go the flow change rules interchanging  $k$  and  $h$ .

Having finished the flow change process, namely, when  $k$  has been reached, subtract  $\varepsilon_h(\lambda)$  to the flow on the arc  $(k, h)$ .

The general step is repeated for the arc  $(k, h)$ , discarding the old labels each time, until it verifies the conditions (2.2). The process is repeated until every arc in the network verifies such conditions.

In the above process, if we find a set  $I$  such that  $\forall \lambda \in I$  there is no possibility to reach  $k$  from  $h$  (or  $h$  from  $k$ ) then there is not a feasible circulation  $\forall \lambda \in I$ .

## Labeling rules

Select any labeled node  $i$  with some unscanned label. Suppose it is  $(p_i, g^\pm, q_g, \varepsilon_i(\lambda); I_i)$ , then

- (1) If  $(i, j)$  is an arc with  $f_{ij}(\lambda) < c_{ij}(\lambda) \forall \lambda \in I'$  and  $I' \cap I_i \neq \emptyset$ , assign  $j$  the label  $(p_j, i^+, q_i, \varepsilon_j(\lambda); I_j = I' \cap I_i)$ , where  $p_j$  will be 1 if this is the first label of this node, otherwise the index of the latest one will be increased by 1;  $q_i$  is the  $p_i$  index of the label that is being scanned and whose  $\varepsilon_i(\lambda)$  is used to evaluate the function  $\varepsilon_j(\lambda)$ ; and  $\varepsilon_j(\lambda) = \min\{\varepsilon_i(\lambda), c_{ij}(\lambda) - f_{ij}(\lambda)\}$  evaluate for  $\lambda \in I' \cap I_i$ .
- (2) If  $(j, i)$  is an arc with  $f_{ji}(\lambda) > l_{ji}(\lambda) \forall \lambda \in I'$  and  $I' \cap I_i \neq \emptyset$ , assign  $j$  the label  $(p_j, i^-, q_i, \varepsilon_j(\lambda); I_j = I' \cap I_i)$ , where  $p_j$  and  $q_i$  are defined as in (1), and  $\varepsilon_j(\lambda) = \min\{\varepsilon_i(\lambda), f_{ji}(\lambda) - l_{ji}(\lambda)\}$  evaluate for  $\lambda \in I' \cap I_i$ .

If in the process of labeling node  $j$ ,  $I_j$  is included in the fifth coordinate of any label of the same node, then this labeling will not be executed.

This step is repeated for every unscanned label of node  $i$ . After this, node  $i$  will be labeled and completely scanned. If eventually node  $i$  receives a new label their status will change to labeled and not completely scanned.

Select a new node not completely scanned and repeat the previous step.

## Flow change rules

At this time, the node  $k$  has been labeled. If  $k$  is labeled  $(1, j^+, q_j, \varepsilon_k(\lambda); I_k)$ , replace  $f_{jk}(\lambda)$  by  $f_{jk}(\lambda) + \varepsilon_k(\lambda)$ ; if  $k$  is labeled  $(1, j^-, q_j, \varepsilon_k(\lambda); I_k)$ , replace  $f_{kj}(\lambda)$  by  $f_{kj}(\lambda) - \varepsilon_k(\lambda)$ .

In either case, next turn attention to node  $j$ . Select the label whose  $p_j$  index agrees with the  $q_j$  index of node  $k$  label. In general, if  $j$  is labeled  $(p_j, i^+, q_i, \varepsilon_j(\lambda); I_j)$ , replace  $f_{ij}(\lambda)$  by  $f_{ij}(\lambda) + \varepsilon_k(\lambda)$ , and if labeled  $(p_j, i^-, q_i, \varepsilon_j(\lambda); I_j)$  replace  $f_{ji}(\lambda)$  by  $f_{ji}(\lambda) - \varepsilon_k(\lambda)$ , and go on to node  $i$ . Stop the flow change when node  $h$  is reached, and go back to general procedure.

## 4. CHARACTERIZATION OF A MAXIMUM PARAMETRIC FLOW

It will be assumed that a feasible parametric flow from 1 to  $n$  exists on the not empty interval  $[\lambda_1, \lambda_2]$ .

**Definition 4.1**

A  $m$ -cut  $\mathbf{X} = ((X_1, \bar{X}_1), \dots, (X_m, \bar{X}_m); I_1, \dots, I_m)$  is a set of  $m$  cuts separating 1 and  $n$ ,  $(X_1, \bar{X}_1), \dots, (X_m, \bar{X}_m)$ , each of them associated to a set of parameters values  $I_1, \dots, I_m$ , which are a partition of  $[\lambda_1, \lambda_2]$ .

Let  $\mathbf{1}_A(\bullet)$  be the indicator function of  $A$ . The capacity of  $\mathbf{X}$  is the following piecewise linear function

$$C(\lambda) = \sum_{r=1}^m \left( \sum_{(i,j) \in (X_r, \bar{X}_r)} c_{ij}(\lambda) - \sum_{(j,i) \in (\bar{X}_r, X_r)} l_{ji}(\lambda) \right) \mathbf{1}_{I_r}(\lambda)$$

**Lemma**

Let  $f$  be a feasible parametric flow from 1 to  $n$  of value  $v(\lambda)$  and let  $\mathbf{X}$  be a  $m$ -cut of capacity  $C(\lambda)$ , then

$$v(\lambda) \leq C(\lambda), \quad \forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$$

**Theorem 4.1:** *Theorem of maximum parametric flow – minimum  $m$ -cut.*

The parametric flow  $f$  of value  $v(\lambda)$  is a maximum parametric flow if and only if there exist  $m$  and a  $m$ -cut of capacity  $C(\lambda)$  such that

$$(4.1) \quad v(\lambda) = C(\lambda), \quad \forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$$

**Proof**

The sufficiency is a consequence of lemma. In order to prove the necessity, taking a maximum parametric flow  $f$  of value  $v(\lambda)$ , a  $m$ -cut is constructed following the algorithm described in table 1. In short,  $[\lambda_1, \lambda_2]$  is subdivided in sets  $I_r$  which are associated to  $X_r$ , the set of reachable nodes from node 1 by a path that includes arcs  $(i, j)$  such that either  $f_{ij}(\lambda) < c_{ij}(\lambda)$  or  $f_{ij}(\lambda) > l_{ij}(\lambda)$ ,  $\lambda \in I_r$ .



## 5. CONSTRUCTION OF A MAXIMUM PARAMETRIC FLOW

The following algorithm is based in labeling and changing flow as the one proposed in section 3. To start the computation an initial feasible parametric flow  $f$  is needed.

### Labeling routine

The node 1 receives the label  $(1, \bullet, \bullet, \infty; [\lambda_1, \lambda_2])$ ; the node 1 is now labeled and unscanned, all other nodes are unlabeled.

Select any labeled node  $i$  with any unscanned label. Suppose this is  $(p_i, g^\pm, q_g, \varepsilon_i(\lambda); I_i)$ . Apply the labeling rules developed in section 3 to this node.

Repeat the process until either the node  $n$  is labeled, or until no more labels can be assigned and  $n$  is unlabeled. If node  $n$  is labeled, stop the labeling routine and go to flow change routine; otherwise, the algorithm has terminated, and the current parametric flow is a maximum parametric flow.

### Flow change routine

The node  $n$  has been labeled. Sea  $\varepsilon_n(\lambda) = 0$  for  $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2] \setminus I_n$ .

If  $n$  is labeled  $(1, j^+, q_j, \varepsilon_n(\lambda); I_n)$ , replace  $f_{jn}(\lambda)$  by  $f_{jn}(\lambda) + \varepsilon_n(\lambda)$ ; if  $n$  is labeled  $(1, j^-, q_j, \varepsilon_n(\lambda); I_n)$ , replace  $f_{nj}(\lambda)$  by  $f_{nj}(\lambda) - \varepsilon_n(\lambda)$ .

In either case, next turn attention to node  $j$ . Select the label whose  $p_j$  index agrees with the  $q_j$  index of node  $n$  label. In general, if  $j$  is labeled  $(p_j, i^+, q_i, \varepsilon_j(\lambda); I_j)$ , replace  $f_{ij}(\lambda)$  by  $f_{ij}(\lambda) + \varepsilon_n(\lambda)$ , and if labeled  $(p_j, i^-, q_i, \varepsilon_j(\lambda); I_j)$  replace  $f_{ji}(\lambda)$  by  $f_{ji}(\lambda) - \varepsilon_n(\lambda)$ , and go on to node  $i$ . Stop the flow change when node 1 is reached, discard the old labels, and go to labeling routine.

### Remark 5.1

In order to start the algorithm, an initial feasible parametric flow can be constructed by applying the algorithm of section 3 to the extended network  $G^* = [N, A^*]$ , obtained from  $G$  by adding the arcs  $(1, n)$  and  $(n, 1)$  with lower and upper bounds 0 and  $\infty$ , respectively.

### Computational complexity

In the worst case, the number of flow augmenting paths is bounded by  $O(\tau mn)$ , where  $\tau$  is the number of breakpoints,  $m$  is the number of arcs and  $n$

is the number of nodes. The complexity of labeling routine has order  $O(\tau^2 n^2)$ . As a whole, the order of complexity is  $O(\tau^3 mn^3)$ .

## 6. ILLUSTRATIVE CASE

A maximum parametric flow is computed for the network of figure 2, where lower and upper bounds are shown on arcs.

An initial parametric flow is computed by applying the algorithm of section 3. In table 2 the successive labelings are shown together with flows on different iterations.

In table 3 the labelings and flows obtained from applying the algorithm of section 5 are shown. The maximum parametric flow is shown in figure 4.