QÜESTIIÓ, vol. 21, 1 i 2, p. 177-199, 1997

CÁLCULO DE LA DISTRIBUCIÓN DEL TIEMPO DE VIDA DE COMPONENTES MEDIANTE AUTOPSIA EN SISTEMAS BINARIOS ADITIVOS, SERIE-PARALELO Y PARALELO-SERIE

FERMÍN MALLOR GIMÉNEZ*
CRISTINA AZCÁRATE CAMIO*
ANTONIO PÉREZ PRADOS*
Universidad Pública de Navarra

En este artículo se estudia el problema de determinar la función de distribución del tiempo de vida de las componentes de un sistema binario, a partir del conocimiento de las leyes que rigen el funcionamiento del sistema y del conjunto de componentes que causa su fallo (obtenida mediante autopsia del sistema en el momento de su deterioro).

Se presentan los resultados de Meilijson (1981) y Nowik (1990) que proponen un sistema de ecuaciones implícito para obtener estas distribuciones. Sin embargo, se observa que este sistema es de muy difícil resolución práctica, por lo que nosotros consideramos un método cuya utilización es más restringida pero más sencilla, y estudiamos su aplicación a sistemas binarios aditivos, serie-paralelo y paralelo-serie.

Determination of the lifetime distribution of the components from the autopsy in additive, series-paralell and paralell-series binary systems

Keywords: Sistema binario, distribución del tiempo de vida, autopsia

Clasificación AMS: 62G05, 62N05, 90B25

* Departamento de Estadística e Investigación Operativa. Universidad Pública de Navarra. Campus de Arrosadía, s/n. 31006 Pamplona.

– Article rebut el gener de 1996.

– Acceptat el novembre de 1996.

1. INTRODUCCIÓN

Un problema que se plantea en el análisis de fiabiliadad de sistemas, es la determinación del tiempo de vida de sus componentes, a partir de la observación del sistema.

Consideraremos un sistema coherente binario (Barlow y Proschan (1981), Zacks (1992), Aggarwal (1993)) constituido por n componentes cuyos tiempos de vida son independientes y poseen el mismo rango de variación. En el tiempo $t = 0$ todas las componentes funcionan (y por tanto, el sistema también). La observación del sistema en cualquier instante de tiempo proporciona su estado, funcionamiento o fallo, pero no el estado de cada una de sus componentes. En el instante de fallo del sistema se realiza una autopsia, esto es, se «abre», y se observa el estado de las componentes. Las leyes que rigen el funcionamiento del sistema, dadas por su función estructura, proporcionan un conocimiento adicional del tiempo en que pudieron fallar las componentes estropeadas.

Utilizaremos la siguiente notación:

- Z, el tiempo de vida del sistema coherente binario;
- $x = (x_1, \dots, x_n)$, el vector de estados de las componentes; x_i toma valores 1 ó 0 según la componente funcione o no;
- $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, el vector de estados de las componentes en el tiempo t;
- $\phi(x)$, la función estructura del sistema;
- $T_1, \dots, T_n$, los tiempos de vida de las n componentes del sistema;
- $F_1, \dots, F_n$, sus funciones de distribución, respectivamente;
- $I = \{i / X_i \leq Z\}$, el conjunto de componentes que se encuentran deterioradas en el instante de fallo del sistema;
- $\{I_1, \dots, I_m\}$, el conjunto de cortes minimales;
- W, la matriz de incidencia mxn corte minimal-componente, es decir, $W(i, j) = 1$ si $j \in I_i$ y $W(i, j) = 0$ en otro caso;
- LS, el conjunto de componentes que pertenecen a todos los cortes minimales. Obsérvese que cuando alguna componente de LS está en funcionamiento, entonces el sistema también funciona.

Un subconjunto A del conjunto de componentes $C = \{1,2,\ldots,n\}$ se llama fatal si puede ser observado con probabilidad positiva en la autopsia del sistema, es decir, el conjunto de componentes A es un corte que verifica $P\{I = A\} > 0$.

Observemos que en estos sistemas, todo corte minimal es un conjunto fatal. Sin embargo, es evidente que no todo corte es un conjunto fatal. Así, por ejemplo, en un sistema en serie, cualquier subconjunto formado por dos componentes es un corte, pero no es fatal.

Para cada conjunto fatal A denotamos con D_A la intersección de todos los cortes minimales que están contenidos en A. Por tanto, D_A es el conjunto de componentes que han podido fallar simultáneamente con el sistema. Es inmediato comprobar que un conjunto de componentes A es fatal si y sólo si $D_A \neq \emptyset$.

El problema de identificación que se plantea consiste en saber cuándo la información obtenida de la autopsia del sistema, esto es, el conocimiento del tiempo Z transcurrido hasta el fallo del sistema y del conjunto fatal A que lo ocasiona, junto con el conocimiento de la función estructura, permite determinar la distribución de los tiempos de vida de las componentes del sistema. Es decir, cuándo la distribución conjunta de Z e I determina unívocamente el vector de las funciones de distribución $F = (F_1,\ldots,F_n)$.

Meilijson (1981) determina condiciones suficientes para la identificación de las funciones de distribución, que se recogen en el siguiente resultado:

Si las variables aleatorias $T_1,\ldots,T_n$ no toman ningún valor con probabilidad estrictamente positiva, son independientes y poseen los mismos extremos esenciales, y si el rango de W es n, entonces la distribución conjunta de Z e I determina unívocamente la distribución de cada T_i.

La información obtenida de la autopsia del sistema es $\{Z = t, I = A\}$, que, en términos de los tiempos de vida de las componentes, es equivalente a saber que

$$\left\{ \max_{j \in A - D_A} T_j < t, \max_{j \in D_A} T_j = t, \min_{j \notin A} T_j > t \right\}$$

Por tanto, llamando $G_A(t) = P\{Z \leq t, I = A\}$ y en particular, para los cortes minimales $G_i(t) = P\{Z \leq t, I = I_i\}$, se verifica que:

$$\begin{aligned} G_A(t) &= \int_0^t (\prod_{A-D_A} F_j(s))(\prod_{A^c}(1 - F_j(s)))d(\prod_{D_A} F_j(s)) \\ G_i(t) &= \int_0^t (\prod_{I_i^c}(1 - F_j(s)))d(\prod_{I_i} F_j(s)) \end{aligned}$$

Operando sobre esta última expresión, se obtiene la siguiente relación:

$$F(t) = exp\{V log \int_0^t exp\{-\overline{W} log(1-F(s))\} dG(s)\}$$

donde $\overline{W}(i,j) = 1 - W(i,j)$, $V = (W^t W)^{-1} W^t$ y $G = (G_1, \ldots, G_m)$.

Meilijson demuestra que este sistema de ecuaciones implícito para las funciones de distribución F_i posee una solución única, y propone un método iterativo de tipo Newton-Kantorovich para su resolución. La descripción de este método puede consultarse en Kantorovich y Akilov (1982) y Yamamoto (1986).

Posteriormente, Nowik (1990) establece condiciones necesarias y suficientes para la identificación:

Sea Φ una función estructura coherente binaria. Supongamos que los tiempos de vida de las componentes T_i, $i \in C$, son independientes. Supongamos, además, que las F_i, $i \in C$, son mutuamente y absolutamente continuas y que cada una posee un único punto con probabilidad positiva en el ínfimo esencial (común). Entonces:

i) Una condición necesaria y suficiente para la identificabilidad de todas las distribuciones F_i, $i \in C$, es que el conjunto LS contenga a lo sumo una componente.

ii) Las distribuciones F_i, $i \in C - LS$, y $\prod_{i \in LS} F_i$ son identificables.

De un modo similar a como lo hizo Meiljson, en la demostración del teorema se obtiene un sistema implícito de ecuaciones para las funciones de distribución y se propone para su resolución el mismo método iterativo Newton-Kantorovich.

En el artículo de Antoine, Doss y Hollander (1993), se prueba una condición suficiente para la identificación, más general que la de Meilijson, suponiendo que las distribuciones son funciones analíticas. Se establece además una condición necesaria para la identificación de las componentes, que es también suficiente para componentes cuyas distribuciones pertenecen a una cierta familia paramétrica, que incluye la distribución exponencial, la distribución normal truncada positiva, y las distribuciones Gamma y Weibull con parámetros enteros.

Los resultados anteriores se fundamentan en propiedades de la matriz de incidencia corte minimal-componente o conjunto fatal-componente. Estas matrices, incluso para sistemas pequeños, pueden tener grandes dimensiones, lo que las hace intratables numéricamente.

Así, por ejemplo, un sistema k-out-of-n tiene $\binom{n}{k}$ cortes minimales distintos, por lo que un sistema pequeño con $n = 20$ y $k = 10$ tendría una matriz asociada corte minimal-componente de dimensión 184756 x 20. Resulta, pues, impensable siquiera plantearse en la práctica la resolución del sistema de ecuaciones para la identificación. Este hecho nos lleva a buscar métodos alternativos más sencillos para la identificación de las componentes del sistema.

Como señala Nowik, en algunas ocasiones, es posible determinar la función de distribución de ciertas componentes de forma directa, sin necesidad de resolver ningún sistema de ecuaciones.

Así, si para la componente r existe un conjunto fatal A que no contiene a r y $B = A \cup \{r\}$ es fatal, con $D_A = D_B$, entonces F_r es la única función no decreciente y continua por la derecha de entre todas las que son iguales a $\frac{1}{1+\frac{dG_A}{dG_B}}$.

Existen sistemas que se rigen por una función estructura que permite la identificación directa de la función de distribución del tiempo de vida de algunas o de todas sus componentes. Es el caso de los sistemas aditivos (p,α) que se definen en la sección 2, en la que obtendremos las condiciones necesarias y suficientes para que este tipo de sistemas posea componentes identificables de forma directa, utilizando desigualdades lineales para variables binarias. Finalmente, se incluye, a modo de ejemplo, la aplicación de estas técnicas para la identificación de las componentes de un sistema aditivo (p,α).

En la sección 3, estudiamos la identificabilidad de las componentes de los sistemas binarios serie-paralelo. Demostraremos que para estos sistemas todas las componentes son directamente identificables, excepto las pertenecientes a los módulos formados por una única componente.

En la sección 4, realizamos un estudio similar de los sistemas binarios paralelo-serie, comprobando que todas las componentes que pertenecen a un módulo con más de dos componentes se pueden identificar directamente.

2. SISTEMAS ADITIVOS (p,α)

2.1. Definición y propiedades

Definición 2.1 *Un sistema se dice binario aditivo* (p,α) *si su función estructura puede expresarse como:*

$$\phi(x) = 1_{\left\{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i > 1-\alpha\right\}}$$

donde $0 < p_i < 1$, $i = 1,\dots,n$; $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$; $0 < \alpha \le 1$; *y* $1_{\{a\}}$ *es la función indicador, que toma valor* 1 *si* a *es cierto y toma valor* 0 *si* a *es falso. Mediante* p *se denota el vector* $(p_1,\dots,p_n)$ *que llamaremos vector de pesos.*

Se puede considerar que el valor de p_i mide la contribución de la componente i al funcionamiento del sistema, en el sentido de que para que este sistema falle es preciso que la suma de los valores p_i asociados a las componentes deterioradas alcance, al menos, el umbral α; o, lo que es lo mismo, el sistema funciona mientras la suma de las cantidades p_i asociadas a las componentes en funcionamiento supera el nivel $1-\alpha$.

Como ejemplo, consideremos un sistema productivo formado por un conjunto de n máquinas, cada una de las cuales puede estar en dos estados: funcionamiento o fallo. La máquina i opera con una tasa de produccción λ_i si funciona, y 0 si no funciona. Supongamos que el sistema únicamente se considera operativo si el nivel global de producción supera cierto nivel P. Para este sistema, $\phi(x) = 1_{\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i > P\}}$ es decir, se trata de un sistema aditivo (p,α) con $p_i = \frac{\lambda_i}{\sum_j \lambda_j}$ y $1-\alpha = \frac{P}{\sum_j \lambda_j}$.

Denotamos por d_A a la diferencia $\sum_{i\in A} p_i - \alpha$.

Conjuntos fatales y cortes minimales

En un sistema binario aditivo (p,α), un conjunto de componentes A es fatal si $d_A \geq 0$ y la intersección de todos los cortes minimales en A es distinta del vacío; es decir, $D_A \neq \emptyset$, que ocurre cuando $\exists j \in A$ cumpliendo $p_j > d_A$.

Un corte minimal es un conjunto I_k de componentes que cumple

$$d_{I_k} \geq 0 \quad \text{de forma que} \quad \forall j \in I_k, \quad p_j > d_{I_k}.$$

El siguiente resultado proporciona una caracterización de los cortes minimales:

Proposición 2.2 *Existe una aplicación biyectiva entre el conjunto de los cortes minimales $\{I_k\}$ y el conjunto de vectores $\{(Y_1,\ldots,Y_n)\}$ que verifican las siguientes restricciones:*

$$(1) \qquad \left.\begin{array}{lll} \sum_{i=1}^{n} p_i Y_i \geq \alpha & & (a) \\ \sum_{i=1}^{n} p_i Y_i + (1-p_j)Y_j < 1+\alpha & \forall j = 1,\ldots,n & (b) \\ Y_i = \{0,1\} & \forall i = 1,\ldots,n & \end{array}\right\}$$

Demostración: Sea $(Y_1,\ldots,Y_n)$ un punto factible para las restricciones anteriores e I_k el conjunto de componentes definido como $I_k = \{i/Y_i = 1\}$. Por la restricción (a) es claro que las componentes de I_k cuando fallan ocasionan el fallo del sistema.

Veamos ahora que el deterioro de las componentes de un subconjunto propio de I_k no puede causar el fallo del sistema, para lo cual es suficiente ver que $\sum_{i\in I_k} p_i - p_j < \alpha$ $\forall j \in I_k$:

$$\sum_{i\in I_k} p_i - p_j < \alpha \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i Y_i - p_j Y_j < \alpha \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i Y_i - p_j Y_j + Y_j - 1 < \alpha$$

que se corresponde con una de las restricciones de tipo (b); por tanto I_k es conjunto minimal.

Sea ahora I_k un corte minimal. Consideramos el vector binario $(Y_1,\ldots,Y_n)$ definido como $Y_i = 1$ si la componente $i \in I_k$, $Y_i = 0$ si la componente $i \notin I_k$. Es inmediato, debido a que el fallo de las componentes que están en I_k ocasionan el fallo del sistema, que $(Y_1,\ldots Y_n)$ cumple (a). La restricción de (b) correspondiente a una componente j cuyo $Y_j = 1$, es decir, que pertenece a I_k, equivale a que la suma de los deterioros de las componentes pertenecientes a I_k, menos el de la componente j, sea menor que α, lo cual es cierto por la definición del conjunto I_k. Las restricciones de (b) correspondientes a componentes j cuyo $Y_j = 0$ se verifican trivialmente.

■

Casos particulares de sistemas aditivos (p,α)

i) Si $\alpha \leq \min_i\{p_i\}$, entonces el sistema se comporta como un sistema en serie, ya que el deterioro de una cualquiera de sus componentes provoca el fallo del sistema.

ii) Si $1-\alpha < \min_i\{p_i\}$, entonces el sistema se comporta como un sistema en paralelo, ya que el fallo del sistema se produce únicamente cuando se estropean todas sus componentes.

iii) Si $p_i = p = 1/n, \quad \forall i = 1,\ldots,n$, entonces el sistema se comporta como un sistema k-out-of-n, con $(k-1)/n < \alpha \leq k/n$.

2.2. Identificación directa de componentes

Lema 2.3 *Un conjunto fatal A posibilita la identificación directa de la función de distribución de la componente r si $r \notin A$ y $\forall i \in A$ se cumple*

(I) $\sum_{j\neq i\in A} p_j \geq \alpha$, *o bien*

(II) $\sum_{j\neq i\in A} p_j < \alpha - p_r$,

y al menos para una componente i se verifica esta última relación.

Demostración: Veamos que el conjunto fatal A verifica las condiciones de identificación directa enunciadas en la introducción, es decir, $B = A \cup \{r\}$ es fatal y se cumple que $D_A = D_B$.

Como $\sum_{i \in B} p_i = \sum_{i \in A} p_i + p_r$, entonces $j \in D_B$ si y sólo si $p_j > d_A + p_r$. Esta relación implica que $r \notin D_B$.

Además, dado que $j \in D_A$ si y sólo si $p_j > d_A$, $D_A = D_B$ si y sólo si se cumple que $\forall j \in A$, $p_j \notin (d_A, d_A + p_r]$, siendo $D_A = D_B \neq \emptyset$, si al menos una componente $j \in A$ verifica $p_j > d_A + p_r$.

Es decir, $\forall i \in A$, $p_i \leq d_A$ o $p_i > d_A + p_r$, y al menos una componente verifica la última desigualdad; lo cual equivale a que $\forall i \in A$ se cumple $\sum_{j \neq i \in A} p_j \geq \alpha$, (I), o bien $\sum_{j \neq i \in A} p_j < \alpha - p_r$, (II), y al menos para una componente i es válida esta última relación.

Notemos que B es fatal por ser $\sum_{i \in B} p_i \geq \sum_{i \in A} p_i \geq \alpha$ y $D_B \neq \emptyset$.

■

El siguiente teorema proporciona una caracterización de la identificabilidad de una componente en términos de un sistema de restricciones lineales para un conjunto de variables binarias.

Teorema 2.4 *Dado un sistema aditivo (p, α) y con pesos de las componentes $p_1, \ldots, p_n$, la componente r-ésima es identificable directamente cuando la siguiente región de factibilidad es no vacía:*

$$
(2) \qquad \left.\begin{array}{lll}
\sum_{j \neq r} p_j Y_j \geq \alpha & & (a) \\
\sum_{j \neq i,r} p_j Y_j + Z_i \geq \alpha & \forall i = 1, \ldots, n, \quad i \neq r & (b) \\
\sum_{j \neq i,r} p_j Y_j + p_r + (Z_i - 1) < \alpha & \forall i = 1, \ldots, n, \quad i \neq r & (c) \\
\sum_i Z_i \geq 1 & & (d) \\
Y_j = \{0, 1\} & \forall j = 1, \ldots, n, \quad j \neq r & \\
Z_i = \{0, 1\} & \forall i = 1, \ldots, n, \quad i \neq r &
\end{array}\right\}
$$

Demostración: Veamos que existe una aplicación biyectiva entre todos los conjuntos fatales A que permiten la identificación directa de la componente r y los vectores factibles $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ de la región (2) anterior.

Para ello, primeramente, veremos que, dado un conjunto fatal A que permite la identificación directa, los valores de las variables:

$$Y_j = 1 \text{ si } j \in A$$

$$Y_j = 0 \text{ si } j \notin A$$

$$Z_j = 0 \text{ si } j \notin A \text{ o si } j \in A \text{ con } p_j \leq d_A$$

$$Z_j = 1 \text{ si } j \in A \text{ y } p_j > d_A + p_r$$

proporcionan un punto factible de (2).

La restricción (a) se cumple por ser A un conjunto fatal.

Comprobamos el cumplimiento del bloque de restricciones (b). Dada una componente i,

- si $i \notin A$, la restricción (b) se reduce a la restricción (a), y por tanto, se cumple.
- si $i \in A$, existen dos situaciones posibles:
  1. La componente i verifica la condición (I) del lema 2.3, en cuyo caso, $Z_i = 0$ y (b) equivale a (I).
  2. La componente i verifica (II) del lema 2.3, en cuyo caso, $Z_i = 1$ y (b) se satisface trivialmente.

Comprobamos ahora el cumplimiento de las restricciones (c). Para una componente i dada,

- si $i \notin A$, entonces $Z_i = 0$ y la restricción (c) es trivial.
- si $i \in A$, existen dos situaciones posibles:
  1. La componente i verifica la condición (I) del lema 2.3, entonces, $Z_i = 0$ y (c) es trivial.
  2. La componente i verifica (II) del lema 2.3, entonces $Z_i = 1$ y (c) equivale a (II).

La restricción (d) se cumple ya que, por el lema anterior, al menos una componente de A satisface la condición (II).

Veremos a continuación que a cada punto factible de (2) se le puede asociar un conjunto fatal A que permite la identificación directa de la componente r.

Definimos este conjunto A como $A = \{i/Y_i = 1\}$, que demostraremos que es fatal y que cumple las condiciones del lema 2.3.

Sea $i \in A$, es decir, $Y_i = 1$; entonces,

Si $Z_i = 0$, (b) equivale a la condición (I) del lema.

Si $Z_i = 1$, (c) equivale a la condición (II) del lema, (en este caso $i \in D_A$).

Notemos que si $Z_i = 1$, entonces también $Y_i = 1$, ya que si fuera $Y_i = 0$, entonces (a) y (c) serían contradictorias.

La restricción (d) asegura que al menos una componente $i \in A$ verifica $Z_i = 1$, es decir, $D_A \neq \emptyset$, que junto con (a) implican que A es fatal.

■

Corolario 2.5 *Si la componente k es directamente identificable, entonces también lo son las componentes i con* $p_i \leq p_k$.

Demostración: Veamos que si la componente k es directamente identificable, también lo es la componente $k-1$.

Para ello, basta observar que si para todo conjunto fatal A que permite la identificación directa de k se tiene $\{k-1\} \notin A$, entonces A permite también la identificación directa de $k-1$. En otro caso, el conjunto fatal $E = \{k\} \cup A - \{k-1\}$ permite identificar directamente dicha componente.

■

Corolario 2.6 *En un sistema aditivo* (p, α) *con todos los pesos de las componentes iguales a* p*, excepto una componente* q *con peso* $3p$*, es posible la identificación de todas las componentes.*

Demostración: La identificación de la distribución de una componente r cualquiera con peso p se puede realizar utilizando el conjunto A de componentes que contiene a la componente q y otras k componentes distintas de r, con $k+1 = \max\{m$ entero tal que $mp \leq \alpha\}$. Definiendo $Y_i = 1$ para las componentes en A e $Y_i = 0$ para el resto, $Z_q = 1$ y $Z_i = 0$ $\forall i \neq q$, es inmediato comprobar por sustitución que se trata de un punto factible para el sistema (2) del teorema anterior.

Una vez identificadas las distribuciones de todas las componentes menos la de q, ésta puede obtenerse de forma directa despejándola de la expresión para la distribución del tiempo en que se observa como conjunto fatal el conjunto A definido anteriormente:

$$dG_A(t) = \left(\prod_{j \neq q \in A} F_j(t) \right) \left(\prod_{A^c} (1 - F_j(t)) d(F_q(t) \right)$$

■

2.3. Ejemplos prácticos

Ejemplo 1 Cálculo de los conjuntos fatales que permiten la identificación directa

Consideremos un sistema aditivo (p, α) con 10 componentes.

Los pesos de estas componentes son : $p_1 = 0.025,\ p_2 = 0.025,\ p_3 = 0.05,\ p_4 = 0.05,\ p_5 = 0.05,\ p_6 = 0.1,\ p_7 = 0.1,\ p_8 = 0.15,\ p_9 = 0.15,\ p_{10} = 0.3$. Supongamos que el sistema falla cuando la suma de los pesos de las componentes estropeadas es de al menos 0.5.

Para cada componente se plantea el correspondiente sistema de restricciones (2) y se busca, si existe, un punto factible. La localización de un punto factible puede realizarse resolviendo un problema de optimización binaria que tiene por restricciones el sistema (2) y por función objetivo la función nula, con lo que todo punto factible es solución óptima.

La identificación directa de la función de distribución de cada una de las diez componentes tiene asociado un sistema (2) con, a lo sumo, 18 variables binarias y 20 restricciones. La optimización de la función nula sobre la región factible (2) proporciona los siguientes conjuntos A fatales que permiten la identificación:

Componente	Conjunto fatal A	D_A	$\sum_{i \in A} p_i$
1	{ 8, 9, 10 }	{ 8, 9, 10 }	0.6
2	{ 8, 9, 10 }	{ 8, 9, 10 }	0.6
3	{ 6, 8, 9, 10 }	{ 10 }	0.7
4	{ 6, 8, 9, 10 }	{ 10 }	0.7
5	{ 6, 8, 9, 10 }	{ 10 }	0.7
6	{ 3, 8, 9, 10 }	{ 10 }	0.65
7	{ 3, 8, 9, 10 }	{ 10 }	0.65
8	{ 3, 4, 6, 7, 10 }	{ 10 }	0.6
9	{ 3, 4, 6, 7, 10 }	{ 10 }	0.6

Además, el conjunto fatal $A = \{\ 6,\ 8,\ 9,\ 10\ \}$ permite la identificación de la función de distribución de la componente 10:

$$dG_A(t) = (1-F_1(t))(1-F_2(t))(1-F_3(t))(1-F_4(t))(1-F_5(t))(1-F_7(t))F_6(t)F_8(t)F_9(t)dF_{10}(t)$$

$$F_{10}(t) = \int_0^t \frac{dG_A(s)}{(1-F_1(s))(1-F_2(s))(1-F_3(s))(1-F_4(s))(1-F_5(s))(1-F_7(s))F_6(s)F_8(s)F_9(s)}$$

Sin embargo, si cambiamos el nivel de fallo α de 0.5 a 0.66, entonces únicamente son identificables directamente las componentes 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7, pero no así las componentes 8 y 9, cuyos sistemas asociados son incompatibles.

Componente	Conjunto fatal A	D_A	$\sum_{i\in A} p_i$
1	{ 6, 8, 9, 10 }	{ 6, 8, 9, 10 }	0.7
2	{ 6, 8, 9, 10 }	{ 6, 8, 9, 10 }	0.7
3	{ 6, 8, 9, 10 }	{ 6, 8, 9, 10 }	0.7
4	{ 6, 8, 9, 10 }	{ 6, 8, 9, 10 }	0.7
5	{ 6, 8, 9, 10 }	{ 6, 8, 9, 10 }	0.7
6	{ 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10 }	{ 10 }	0.85
7	{ 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10 }	{ 10 }	0.85

Ejemplo 2 Identificación del tiempo de vida de las componentes

Consideremos un sistema aditivo con $\alpha = 0.7$ y cuatro componentes, cuyos pesos son $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.1$, $p_3 = 0.2$, $p_4 = 0.6$. Se conoce para los conjuntos fatales

$$A_1 = \{2,3,4\}, A_2 = \{1,3,4\}, A_3 = \{1,2,4\} \quad \text{y} \quad B = \{1,2,3,4\},$$

sus funciones $G_{A_1}(t)$, $G_{A_2}(t)$, $G_{A_3}(t)$ y $G_B(t)$ de modo que:

$$\begin{aligned} G_{A_1}(t) &= (-3e^{-2t} + 3e^{-4t} - e^{-6t} + 1)/6 \\ G_{A_2}(t) = G_{A_3}(t) &= (-20e^{-3t} + 15e^{-4t} + 12e^{-5t} - 10e^{-6t} + 3)/60 \\ G_B(t) &= (-30e^{-t} + 15e^{-2t} + 20e^{-3t} - 15e^{-4t} - 6e^{-5t} + 5e^{-6t} + 11)/30 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
dG_{A_1}(t) &= (e^{-2t} - 2e^{-4t} + e^{-6t})dt \\
dG_{A_2}(t) = dG_{A_3}(t) &= (e^{-3t} - e^{-4t} - e^{-5t} + e^{-6t})dt \\
dG_B(t) &= (e^{-t} - e^{-2t} - 2e^{-3t} + 2e^{-4t} + e^{-5t} - e^{-6t})dt
\end{aligned}$$

- *Identificación de $F_1(t)$*

Los conjuntos de componentes A_1 y B permiten la identificación directa de $F_1(t)$,

$$F_1(t) = \frac{1}{1 + \frac{dG_{A_1}(t)}{dG_B(t)}} = 1 - e^{-t}$$

que corresponde a una variable exponencial de media 1.

- *Identificación de $F_2(t)$ y $F_3(t)$*

Los conjuntos de componentes A_2, B y A_3, B permiten la identificación directa de $F_2(t)$ y $F_3(t)$, respectivamente.

$$F_2(t) = F_3(t) = \frac{1}{1 + \frac{dG_{A_2}(t)}{dG_B(t)}} = 1 - e^{-2t}$$

que corresponde a una variable exponencial de media $1/2$.

- *Identificación de $F_4(t)$*

Una vez conocidas las funciones $F_1(t)$, $F_2(t)$ y $F_3(t)$, la función $F_4(t)$ puede calcularse a partir de cualquier conjunto fatal que contenga a la componente 4; por ejemplo, en este caso, el conjunto B:

$$dG_B(t) = F_1(t)F_2(t)F_3(t)dF_4(t)$$

Por tanto,

$$F_4(t) = \int_0^t \frac{dG_B(s)}{F_1(s)F_2(s)F_3(s)} = \int_0^t e^{-s}ds = 1 - e^{-t}$$

que corresponde a una variable exponencial de media 1.

3. SISTEMAS BINARIOS SERIE-PARALELO

3.1. Definición y propiedades

Sea un sistema binario con n componentes distribuidas en N subconjuntos disjuntos de componentes que denominaremos módulos, colocados en serie, a los que denotamos $M_1, \ldots, M_N$. Cada uno de estos módulos está formado por $\#M_i$, $i = 1, \ldots, N$, componentes dispuestas en paralelo. El sistema resultante se denomina sistema binario serie-paralelo.

Denotando por x_j^i el estado de la componente j-ésima del módulo i, la función estructura de un sistema binario serie-paralelo viene dada por:

$$\phi(x) = \min_{i=\{1,\ldots,N\}} \{ \max_{j\in\{1,\ldots,\#M_i\}} x_j^i \}$$

Conjunto fatales y cortes minimales

Los únicos cortes minimales de un sistema binario serie-paralelo son los conjuntos M_i con $i = 1, \ldots, N$.

Un conjunto de componentes A es fatal si existe un único $j \in \{1, \ldots, N\}$ tal que $M_j \subset A$. Siendo, por tanto, $D_A = M_j$.

El número de conjuntos fatales en un sistema binario serie-paralelo es

$$\sum_{j=1}^{N} \prod_{i\neq j} (2^{\#M_i} - 1)$$

que se demuestra observando que, fijado el módulo M_j que está contenido en el conjunto fatal A, existen $\prod_{i\neq j}(2^{\#M_i} - 1)$ formas distintas válidas para el subconjunto $A - M_j$.

3.2. Identificación directa de componentes

En el teorema siguiente, se determinan las componentes que pueden identificarse de forma directa.

Teorema 3.1 *En un sistema binario serie-paralelo, todas las componentes son directamente identificables, salvo las pertenecientes a los módulos formados por una única componente.*

Demostración: Sea una componente r cualquiera de un módulo M_i, para $i \in \{1,\dots,N\}$, cumpliendo $\#M_i > 1$. Consideramos los conjuntos A y B siguientes:

$$A = M_j \text{ con } j \neq i \in \{1,\dots,N\} \quad \text{y} \quad B = M_j \cup \{r\}.$$

A y B son conjuntos fatales con $D_A = D_B = M_j$, por lo que la componente r es directamente identificable.

Sin embargo, si r es la única componente de un módulo, el fallo de esta componente ocasiona el fallo del sistema, por lo que si $r \in A$, entonces $D_A = \{r\}$, y no es posible su identificación directa.

■

Corolario 3.2 *En un sistema binario serie-paralelo, una condición necesaria y suficiente para que un conjunto fatal permita identificar directamente la componente r es que exista una componente distinta de r en su mismo módulo que se encuentre funcionando.*

Observación 3.3 El número de conjuntos fatales que permiten identificar una componente $r \in M_j$ es:

$$(2^{\#M_i} - 2) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \prod_{h \neq j,i} (2^{\#M_h} - 1)$$

que se obtiene comprobando que el número de posibles formas en las que pueden encontrarse los $N-1$ módulos que no contienen a r es, $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \prod_{h \neq j,i} (2^{\#M_h} - 1)$. Además, por el corolario 3.2, en el módulo i, debe existir al menos una componente distinta de r funcionando, por tanto, las $\#M_h - 1$ componentes distintas de r, pueden encontrarse en $(2^{\#M_i - 1} - 1)$ formas diferentes, y, en cada una de éstas, la componente r puede estar en funcionamiento o en estado de fallo.

□

4. SISTEMAS BINARIOS PARALELO-SERIE

4.1. Definición y propiedades

Un sistema binario paralelo-serie está formado por N módulos $M_1,\dots,M_N$, dispuestos en paralelo, de forma que las $\#M_i$ componentes que constituyen el módulo

M_i están colocadas en serie. La función estructura de estos sistemas es:

$$\phi(x) = \max_{i=\{1,\ldots,N\}} \{ \min_{j\in\{1,\ldots,\#M_i\}} x_j^i \}$$

Conjuntos fatales y cortes minimales

En un sistema binario paralelo-serie, los cortes minimales están formados por una componente de cada módulo: $I_h = \{j_1, j_2, \ldots, j_N\}$, con $j_k \in M_k$. Por tanto, el número de cortes minimales es $\prod_{k=1}^{N} \#M_k$.

Un conjunto de componentes A es fatal si existe al menos un módulo M_j con una única componente fallada.

El número de conjuntos fatales es:

$$\sum_{i=1}^{N} (\#M_i) \prod_{j=1}^{i-1} (2^{\#M_j} - 1 - \#M_j) \prod_{j=i+1}^{N} (2^{\#M_j} - 1)$$

Contamos el número total de conjuntos fatales condicionando con el módulo del sistema de menor índice que tiene una única componente deteriorada, (módulo i). Así, los $i-1$ primero módulos M_j tienen que tener al menos dos componentes deterioradas, y por tanto, $(2^{\#M_j} - 1 - \#M_j)$ configuraciones para cada uno de ellos, y los $N-i$ últimos módulos M_j tienen al menos una componente en estado cero, es decir, $(2^{\#M_j} - 1)$ posibilidades de elección en cada módulo. Sumando para todos los posibles valores de i, se tiene el número anterior.

4.2. Identificación directa de componentes

Analizamos a continuación las componentes identificables directamente en estos sistemas.

Teorema 4.1 *En un sistema binario paralelo-serie, todas las componentes son directamente identificables, excepto las pertenecientes a un módulo con dos o menos componentes.*

Demostración: Sean r, u, v componentes de un módulo M_k, y j_i una componente cualquiera del módulo M_i, $i \neq k$.

Entonces, el conjunto fatal $A = \{j_i / i = 1, \ldots, N; i \neq k\} \cup \{u, v\}$, y el conjunto fatal $B = A \cup \{r\}$ permiten la identificación de la componente r, puesto que verifican $D_A = D_B = \{j_i / i = 1, \ldots, N; i \neq k\}$.

Si $r,s \in M_k$, con $\#M_k = 2$, basta observar que el funcionamiento o fallo de la componente r implica que la componente s pertenezca o no al subconjunto intersección de todos los cortes minimales contenidos en el conjunto fatal, por lo que no existen dos conjuntos fatales A y B cumpliendo las hipótesis de identificación. Si $r \in M_k$, con $\#M_k = 1$, obviamente $r \in D_A$, para cualquier conjunto fatal A, por lo que tampoco es identificable.

■

Corolario 4.2 *En un sistema binario paralelo-serie, una condición necesaria y suficiente para que un conjunto fatal permita identificar directamente la componente r es que existan dos componentes distintas de r en su mismo módulo que hayan fallado.*

Observación 4.3 El número de conjuntos fatales que permiten identificar una componente $r \in M_h$ es:

$$2(2^{\#M_h - 1} - \#M_h) \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq h}}^{N} \#M_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq h}}^{i-1} (2^{\#M_j} - 1 - \#M_j) \prod_{\substack{j=i+1 \\ j \neq h}}^{N} (2^{\#M_j} - 1)$$

Razonando como en resultados anteriores, basta tener en cuenta que las $\#M_h - 1$ componentes distintas de r del módulo h, pueden encontrarse de $(2^{\#M_h - 1} - \#M_h)$ formas diferentes, y que la componente r, puede estar en cualquier estado: 0 ó 1.

□

5. OBSERVACIONES FINALES

1. El modelo de autopsia tratado en este artículo fue introducido por Meilijson (1981), y supone una generalización del modelo *Competing Risks* clásico, que considera únicamente sistemas en serie. Los principales resultados de este modelo clásico pueden encontrarse en Nadas (1970), Moeschberger (1974), Gail (1975), Tsiatis (1975) y Prentice y otros (1978).

2. El problema de identificación de funciones de distribución mediante autopsia en sistemas multiestado, (estos sistemas son tratados, por ejemplo, en El-Neweihi y Proschan (1984), y Avent (1993)), ha sido estudiado por Costa Bueno (1988). Este autor extiende directamente los resultados de Meilijson para el caso binario. Para estos sistemas multiestado también es posible aplicar el concepto de identificación directa de un modo similar al presentado aquí para sistemas binarios.

3. El estudio de este problema de identificación desde un punto de vista estadístico fue abordado por primera vez por Watelet (1990), que propuso un estimador no paramétrico reemplazando las funciones de distribución teóricas por empíricas, en el sistema de ecuaciones implícito propuesto por Meilijson, aunque no consiguió obtener resultados teóricos de carácter general.

4. En el trabajo de Meilijson (1994), suponiendo funciones de distribución pertenecientes a familias paramétricas con buenas propiedades, se estima, mediante máxima verosimilitud, el conjunto de parámetros desconocidos. En este trabajo, además, se propone un modelo de autopsia más general, permitiendo conocer el tiempo exacto de fallo de algunas componentes, y de otras en ocasiones, dependiendo del estado de las anteriores.

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer las indicaciones y sugerencias formuladas por dos expertos anónimos que sin duda han contribuido a mejorar este trabajo.

BIBLIOGRAFÍA

[1] **Aggarwal, K.K.** (1993). *Reliability Engineereing*. Kluwer Academic Publishers.

[2] **Antoine, R., H. Doss** y **M. Hollander** (1993). «On the identifiability in the autposy model of reliability theory». *Journal of Applied Probability*, **30**, 913–930.

[3] **Avent, T.** (1992). *Reliability and Risk Analysis*. Elsevier Applied Science.

[4] **Barlow, R.E.** y **F. Proschan** (1981). *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*. To Begin with, Silver Spring, Ms.

[5] **Costa Bueno, V.** (1988). «A note on the component lifetime estimation of a multistate monotone system through the system lifetime». *Advances Applied Probability*, **20**, 686–689.

[6] **El-Neweihi, E.** and **F. Proschan** (1984). «Degradable systems: a survey of multistate coherent systems». *Commun. Statist. - Theory Math.*, **13**, 405–432.

[7] **Gail, M.** (1975). «A review and critique of some models used in competing risk analysis». *Biometrics*, **31**, 209–222.

[8] **Kantorovich, L.V.** y **G.P. Akilov** (1982). *Functional Analysis*. Pergamon Press.

[9] **Meilijson, I.** (1981). «Estimation of the lifetime distribution of the parts from the autopsy statistics of the machine». *Journal of Applied Probability*, **18**, 829–838.

[10] **Meilijson, I.** (1994). «Competing risks on coherent reliability systems: estimation in the parametric case». *Journal of the American Statistical Association*, **89**, 1459–1464.

[11] **Moeschberger, M.L.** (1974). «Life tests under dependent causes of failure». *Technometrics*, **16**, 39–47.

[12] **Nadas, A.** (1970). «On estimating the distribution of a random vector when only the smallest coordinate is observable». *Technometrics*, **12**, 923–924.

[13] **Nowik, S.** (1990). «Identifiability Problems in Coherent Systems». *Journal of Applied Probability*, **28**, 862–872.

[14] **Prentice, R.L.; Kalbfleisch, J.D.; Peterson, A.V.; Farewell, V.T.** and **N.E. Breslow** (1978). «The analysis of failure times in the presence of competing risks». *Biometrics*, **34**, 541–554.

[15] **Tsiatis, A.** (1975). «A nonidentifiability aspect in the problem of competing risks». *Proceedings of the National Academy of Science USA*, **72**, 20–22.

[16] **Yamamoto, T.** (1986). «A method for finding sharp error bounds for Newton's method under the Kantorovich assumption». *Numer. Math.*, **49**, 203–220.

[17] **Watelet, L.F.** (1990). «Nonparametric estimation of component life distributions in Meilijson's competing risk model». Ph.D. Thesis, University of Washington.

[18] **Zacks, S.** (1992), *Introduction to Reliability Analysis. Probability Models and Statistical Models*. Springer-Verlag.

ENGLISH SUMMARY

DETERMINATION OF THE LIFETIME DISTRIBUTION OF THE COMPONENTS FROM THE AUTOPSY IN ADDITIVE, SERIES-PARALLEL AND PARALLEL-SERIES BINARY SYSTEMS

FERMÍN MALLOR GIMÉNEZ*
CRISTINA AZCÁRATE CAMIO*
ANTONIO PÉREZ PRADOS*
Universidad Pública de Navarra

In this paper, we analyze the question of determining the lifetime distributions of the binary system components, from the knowledge of the system functioning rules and from the joint distribution of the lifetime system and the component set that caused the death of the system.

We present the results obtained by some authors, who propose a system of implicit equations for the computation of those distributions. However, we observe that it has a difficult resolution in practice; therefore, we consider a method that can be used in fewer situations than the former, but with a rather simple computation. We study its application in the additive, series-parallel and parallel-series binary systems.

Keywords: Binary system, lifetime distribution, autopsy

AMS Classification: 62G05, 62N05, 90B25

* Departamento de Estadística e Investigación Operativa. Universidad Pública de Navarra. Campus de Arrosadía, s/n. 31006 Pamplona.

– Received january 1996.
– Accepted november 1996.

1. INTRODUCTION

The determination of the component lifetime distributions from the observation of the system is an analyzing problem in system reliability.

Let us consider a coherent binary system (Barlow and Proschan (1981), Zacks (1992), Aggarwal (1993)) composed by n components which act independently. At $t = 0$, every component and the system are working. We observe the system until it fails. The observed data obtained from the autopsy of the system consist both of the failure time of the system and of the set of components that are dead at the instant of the system failure (fatal set), without knowing the exact time at which each component has failed. The structure function of the system provides an additional information about the instant in which the failed components could have died.

From these autopsy data, the goal is to estimate the lifetime distribution functions of the components. In Meilijson (1981), Nowik (1990) and Antoine et al (1993), necessary and sufficient conditions for the identifiability, on some assumptions, are given. These results are based on the properties of the incidence matrix cut set-component or fatal set-component. These matrices are of large size, even for simple systems, and they are therefore complex from the point of view of numerical calculus.

Sometimes the distribution function of certain components can be directly determined, without solving any complex system of equations. For instance, it is possible for component r when there exists a fatal set A not containing r and if the set $B = A \cup \{r\}$ is also fatal, and both, A and B, have the same subset of components that may be failed simultaneously with the system.

The structure function of some systems allows the direct identification of the components. In this paper we analyze the direct identifiability of the (p,α) additive binary systems, the series-parallel, and the parallel-series binary systems.

2. (p,α) ADDITIVE BINARY SYSTEMS

In this section (p,α) additive binary system are introduced as follow:

Definition 2.1 *A binary system is called (p,α) additive system if its function structure can be expressed as follows:*

$$\phi(\overline{x}) = 1_{\left\{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i > 1-\alpha\right\}}$$

where $0 < p_i < 1$, $i = 1, \ldots, n$; $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$; $0 < \alpha \leq 1$; and $1_{\{a\}}$ is the indicator function, *which takes value 1 if a is true, and 0 if a is false. Let* $p = (p_1, \ldots, p_n)$ *be the weight vector.*

In this section minimal cut sets and fatal sets are analyzed and the directly identifiable components are characterized by means of the existence of feasible points in a set of linear constraints with binary variables.

Theorem 2.4 *Let a* (p, α) *additive binary system with weights* $p_1, \ldots, p_n$*; any component r is directly identifiable if the following region is no empty:*

$$(3) \qquad \left.\begin{array}{lll} \sum_{j \neq r} p_j Y_j \geq \alpha & & (a) \\ \sum_{j \neq i,r} p_j Y_j + Z_i \geq \alpha & \forall i = 1, \ldots, n, \quad i \neq r & (b) \\ \sum_{j \neq i,r} p_j Y_j + p_r + (Z_i - 1) < \alpha & \forall i = 1, \ldots, n, \quad i \neq r & (c) \\ \sum_i Z_i \geq 1 & & (d) \\ Y_j = \{0,1\} & \forall j = 1, \ldots, n, \quad j \neq r & \\ Z_i = \{0,1\} & \forall i = 1, \ldots, n, \quad i \neq r & \end{array}\right\}$$

Observe that if the r component can be directly identified, then so can the i component with $p_i \leq p_r$.

We conclude this section with two illustrative examples.

3. SERIES-PARALLEL SYSTEMS

A series-parallel system consists of n components distributed in K disjoint subsets, that we say modules, series-arranged, $M_1, \ldots, M_K$. Each of these modules has $\#M_i$ components, $(i = 1, \ldots, K)$, in parallel.

The next theorem provides the directly identifiable components of these systems.

Theorem 3.1 *In a series-parallel binary system, all the components can be directly identified, except those belonging to a module that consists of a single component.*

4. PARALLEL-SERIES BINARY SYSTEMS

A parallel-series binary system consists of K parallel-arranged modules, such that $\forall i = 1, \ldots, K$ the $\#M_i$ components of the module M_i being series-arranged.

We shall provide the components that can be directly identified in a parallel-series binary system.

Theorem 4.1 *In a parallel-series binary system, all the components can be directly identified, except those belonging to a module with less than three components.*