QÜESTIIÓ, vol. 22, 2, p. 313-335, 1998

UN MÉTODO PRIMAL DE OPTIMIZACIÓN SEMI-INFINITA PARA LA APROXIMACIÓN UNIFORME DE FUNCIONES*

T. LEÓN
S. SANMATÍAS
E. VERCHER
Universitat de València*

En este trabajo presentamos un algoritmo que resuelve problemas clásicos de aproximación que pueden ser formulados como programas semi-infinitos lineales. Hemos estudiado la caracterización algebraica de los puntos extremos y demostrado algunas de sus propiedades. Hemos diseñado un procedimiento que genera direcciones factibles a partir de la solución de ciertos programas lineales finitos, que también caracteriza la solución óptima del problema. El método incorpora una etapa interna de purificación para alcanzar un punto extremo desde cualquier solución factible, mejorando el valor de la función objetivo. Finalmente, comparamos el comportamiento de las diferentes estrategias sobre varios problemas de aproximación, comprobando la eficacia del algoritmo propuesto.

A primal semi-infinite programming method for the uniform approximation problem.

Palabras clave: Programación semi-infinita, aproximación uniforme, puntos extremos, métodos de direcciones factibles.

Clasificación AMS: 90C34, 41A50, 49M35

⋆ Este trabajo ha sido subvencionado por el Ministerio de Educación y Ciencia, España, DGICYT, PB93-0703.

∗ Departament d'Estadística i Investigació Operativa. Facultat de Matemàtiques. Universitat de València. C/ Dr. Moliner, 50. 46100 Burjassot (Valencia).

– Recibido en junio de 1997.
– Aceptado en marzo de 1998.

1. INTRODUCCIÓN

El problema de aproximación uniforme consiste en determinar los coeficientes x_1, x_2, $\ldots$, x_n de aquella combinación lineal de un conjunto dado de funciones $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ continuas y definidas en un intervalo $[\alpha, \beta]$, que mejor aproxima a una cierta función $b(\cdot)$, también continua y definida en $[\alpha, \beta]$. Es decir, se trata de minimizar $x_0 := \max|b(s) - P(x,s)|$, donde la variable x_0 es el error máximo y $P(x,s) := x_1\, a_1(s) + x_2\, a_2(s) + \cdots + x_n\, a_n(s)$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ denota una aproximación lineal.

Es bien conocido que cuando el conjunto de funciones aproximantes es el de los polinomios de grado menor que n, el error máximo de la mejor aproximación se alcanza al menos en $n+1$ puntos de $[\alpha, \beta]$, con signos alternos, y que esta mejor aproximación es única. Esta propiedad de alternancia no solo se verifica en el caso de aproximación mediante polinomios, ocurre siempre que el conjunto de funciones $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ cumplan determinadas condiciones (vease Cheney (1966)). El procedimento utilizado tradicionalmente para resolver esta clase de problemas es el algoritmo de Remez, en sus diferentes versiones. En el libro de Powell (1981) se puede encontrar la descripción de estos algoritmos.

El problema de aproximación uniforme puede formularse como un problema semi-infinito lineal de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{lll}
\text{(PA1)} & \text{Min} & x_0 \\
 & \text{s.a.} & x_0 + a(s)^T x \ \geq \ b(s) \\
 & & x_0 - a(s)^T x \ \geq \ -b(s) \\
 & & x_0 \ \in \ \mathbb{R}, \quad x \ \in \ \mathbb{R}^n, \quad s \ \in \ [\alpha, \beta]
\end{array}
$$

Los problemas de aproximación de funciones constituyen, de hecho, una de las aplicaciones más importantes de la programación semi-infinita. En el libro de Anderson y Nash (1987) se puede encontrar una discusión detallada del problema de aproximación uniforme, que incluye la formulación del dual standard de (PA1):

$$
\begin{array}{lll}
\text{(DA)} & \text{Max} & \left\{ \displaystyle\sum_{s \in S} w_1(s)\, b(s) - \sum_{s \in S} w_2(s)\, b(s) \right\} \\
 & \text{s.a.} & \displaystyle\sum_{s \in S} w_1(s) + \sum_{s \in S} w_2(s) = 1 \\
 & & \displaystyle\sum_{s \in S} w_1(s)\, a(s) - \sum_{s \in S} w_2(s)\, a(s) = 0_n \\
 & & w_1(s), w_2(s) \ \in \ \mathbb{R}_+^{(S)} \quad s \ \in \ S
\end{array}
$$

donde $\mathbb{R}_+^{(S)}$ es el cono de las sucesiones finitas generalizadas no negativas. Si denotamos el soporte de w_i como $\operatorname{supp}(w_i) = \{s \in S : w_i(s) > 0\}$, para $i = 1, 2$, se tiene que $\operatorname{supp}(w_i)$ es finito.

Anderson y Nash (1987) han demostrado que uno de los métodos de cambio de Remez puede considerarse como una extensión del algoritmo dual del simplex para programas semi-infinitos lineales aplicado a (DA), pues pasa de una solución factible básica del problema dual a otra, aumentando el valor de la función objetivo. Siendo las soluciones factibles básicas del dual (w_1, w_2) aquellas cuyo soporte, $\text{supp}(w_1) \cup \text{supp}(w_2)$, contiene exactamente $n+1$ elementos que estan intercalados, de forma que si $s_1 < s_2$ están en $\text{supp}(w_1)$, existe $t \in \text{supp}(w_2)$ tal que $s_1 < t < s_2$.

En el libro de Glashoff y Gustafson (1983) se hace un estudio exhaustivo de este par de problemas duales. Bajo la exigencia de que el conjunto de funciones aproximantes $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ es un sistema de Chebyshev de orden dos, se demuestra que no hay fallo de dualidad. La caracterización de la solución óptima del primal se establece a partir de las propiedades de las soluciones del problema dual y se propone un algoritmo de tres fases para resolver el problema (PA1).

El motivo por el que nos hemos planteado desarrollar un método primal para resolver el problema (PA1), es que la aproximación uniforme de funciones y sus aplicaciones dan lugar a una amplia clase de problemas de programación semi-infinita (PSI), que se utilizan a menudo como ejemplos test para ilustrar el comportamiento de procedimientos más generales de PSI (vease, p.e. Hettich y Kortanek (1993)). Los algoritmos que presentamos en este trabajo son especializaciones de un método de direcciones factibles pensado para resolver problemas con función objetivo lineal y con restricciones indexadas en subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$.

En la Sección 2 estudiamos la caracterización algebraica de los puntos extremos de las regiones factibles de (PA1) y de su dual como soluciones factibles básicas primales y duales, demostramos que cuando la solución óptima del problema primal cumple la propiedad de la alternancia de signos, el óptimo se alcanza en un punto extremo degenerado. En la Sección 3 introducimos un esquema para determinar direcciones factibles de descenso, basado en una condición de optimalidad del tipo Karush-Kuhn-Tucker que da lugar a los tres algoritmos que detallamos en la Sección 4. Y, finalmente, en la Sección 5 mostramos y comparamos los resultados obtenidos al resolver algunos problemas utilizando los diferentes métodos implementados.

2. PUNTOS EXTREMOS

En esta sección se comprueba que la solución óptima del problema (PA1) se encuentra en un punto extremo de la región factible y caracterizaremos la forma que tienen estos puntos. Introduciendo dos funciones de holgura $z_1(y,s) = x_0 + a(s)^T x - b(s)$ y $z_2(y,s) = x_0 - a(s)^T x + b(s)$, para $y = (x_0, x)$ podemos escribir (PA1) en forma standard:

$$
\begin{array}{lll}
\text{(PA2)} & \text{Min} & y_0 \\
 & \text{s.a.} & v_1(s)^T y - z_1(y,s) = b(s) \qquad s \in S \\
 & & v_2(s)^T y - z_2(y,s) = -b(s) \quad s \in S \\
 & & y \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad z(y,s) \geq 0 \qquad s \in S
\end{array}
$$

siendo $S = [\alpha, \beta]$, $v_1(s) = (1, a_1(s), \ldots, a_n(s))^T$, $v_2(s) = (1, -a_1(s), \ldots, -a_n(s))^T$ y $z(\cdot,\cdot) = (z_1(\cdot,\cdot), z_2(\cdot,\cdot))$.

En un trabajo publicado en 1985 Nash define, en un contexto puramente algebraico, los objetos fundamentales y las operaciones de la programación lineal en espacios infinito dimensionales. De esta manera, puede extender las definiciones de soluciones factibles básicas degeneradas y no degeneradas, costes reducidos y pivote de la programación lineal al caso infinito dimensional. En particular, buscando una definición algebraica de solución factible básica, de manera que hubiera una correspondencia con la de punto extremo, Nash demostró que lo que debía caracterizar a una solución factible básica es que define un subespacio sobre el cual se resuelven con unicidad la restricciones, este subespacio es precisamente lo que llamó solidificación. Siguiendo su notación, para el (PA2), tendríamos que $X = \mathbb{R}^{n+1} x C(S)^2$, donde $C(S)^2 = \{(u_1, u_2) : u_1 \in C(S), u_2 \in C(S)\}$ y la aplicación lineal:

$$
\begin{array}{llll}
A: & X & \longrightarrow & C(S)^2 \\
 & \big((x_0, x)^T, (u_1(\cdot), u_2(\cdot)\big) & \longrightarrow & \big(x_0 + a(\cdot)^T x - u_1(\cdot), x_0 - a(\cdot)^T x - u_2(\cdot)\big)
\end{array}
$$

siendo $C(S)$ el espacio de las funciones continuas en S. Denotamos por

$$
\begin{array}{rcl}
N(A) & = & \big\{\big((x_0, x)^T, (u_1, u_2)\big) \in \mathbb{R}^{n+1} X\, C(S)^2 : u_1(s) = \\
 & = & x_0 + a(s)^T x, u_2(s) = x_0 - a(s)^T x\big\}
\end{array}
$$

el anulador de A y por

$$
\begin{array}{rcl}
B\big((x_0, x)^T, (u_1, u_2)\big) & = & \big\{\big((\chi_0, \chi)^T, (\nu_1, \nu_2)\big) : \exists\, \lambda > 0 : ((x_0, x)^T, (u_1, u_2)) \\
 & & \pm \lambda((\chi_0, \chi)^T, (\nu_1, \nu_2)) \geq 0\big\}
\end{array}
$$

la solidificación de $\big((x_0, x)^T, (u_1, u_2)\big)$. En ese mismo trabajo se demuestra que si existe una solución óptima $(y^*; z^*) \in X$, tal que la dimensión de $B(y^*; z^*) \cap N(A)$ es finita, entonces el óptimo también se alcanza en un punto extremo. En nuestro caso, se comprueba fácilmente que $N(A)$ tiene dimensión finita. Por tanto, la única solución óptima del problema (PA2) es un punto extremo.

Hemos comprobado que, al particularizar las caracterizaciones de punto extremo, solución factible básica degenerada y no degenerada para el problema (PA2), obtenemos resultados análogos a los que Anderson y Lewis (1989) han establecido para una única función de holgura. Por este motivo no incluimos las pruebas de los Teoremas 2.1 y 2.2.

Definición 2.1. *Sea $(y;z)$ una solución factible del problema (PA2), se define constr$_i(y)$ $= \{s \in S : z_i(y,s) = 0\}$ para $i = 1,2$, y constr(y) = constr$_1(y) \cup$ constr$_2(y)$.*

Para toda solución factible $(y;z)$, los elementos s de constr$_i(y)$, $i = 1,2$, son aquellos en los que se alcanza la diferencia máxima entre $b(s)$ y $P(x,s)$. En los puntos de constr$_1(y)$ (constr$_2(y)$) esta diferencia es positiva (negativa). Por tanto, constr$_1(y) \cap$ constr$_2(y) = \emptyset$, ya que si existiera $s^* \in S$, tal que $z_1(y,s^*) = z_2(y,s^*) = 0$, entonces $x_0 + a(s^*)^T x - b(s^*) = 0 = x_0 - a(s^*)^T x + b(s^*)$, con lo que $x_0 = 0$ y la aproximación óptima sería exacta.

Asumimos las siguientes hipótesis:

Hipótesis 1. *Las funciones $b(\cdot)$ y $a_i(\cdot)$, $i = 1,2,\dots,n$, son n veces continuamente diferenciables.*

Hipótesis 2. *El conjunto constr(y) es finito, para todo $y \in \mathbb{R}^{n+1}$.*

Nota. Si las funciones $a_i(\cdot)$ y $b(\cdot)$ son analíticas, entonces z_1 y z_2 lo son y tienen un número finito de ceros en S o son idénticamente nulas. En particular, esta condición se cumple cuando las funciones aproximantes son polinomios y $b(\cdot)$ es analítica.

Definición 2.2. *Sea $(y;z)$ una solución factible de (PA2), tal que constr$(y) = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$. Denotamos por $d(i)$ el grado de $s_i \in$* constr(y), i.e. $d(i)$ es el menor entero tal que:

$$
\begin{array}{ll}
z^{(k)}(y,s_i) = 0 & k = 0,1,\dots,d(i) \\
z^{(k)}(y,s_i) \neq 0 & k = d(i)+1 \quad i = 1,2,\dots,m \\
\text{donde} \quad z \equiv z_1 \quad \text{o} \quad z \equiv z_2. &
\end{array}
$$

Teorema 2.1. *Sea $(y;z)$ una solución factible de (PA2), entonces $(y;z)$ es un punto extremo si y solo si $V(y) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : v_k^{(j)}(s_i)^T x = 0,\ j = 0,\dots,d(i),\ s_i \in$ constr$_k(y)$, $k = 1,2\} = \{0_{n+1}\}$, donde $v_k^{(j)}(s_i) = \left(0, a_1^{(j)}(s_i), a_2^{(j)}(s_i), \dots, a_n^{(j)}(s_i)\right)^T$, para $j > 0$.*

Nota. La condición $V(y) = \{0_{n+1}\}$ es equivalente a la independencia lineal de las filas de la matriz $B(y)$, cuyas columnas son:

$$v_1(s_1),\ldots,v_1(s_p),v_2(s_{p+1}),\ldots,v_2(s_m),v_1'(s_1),v_1''(s_1),\ldots,v_1^{d(1)}(s_1),\ldots,v_1'(s_p),$$
$$v_1''(s_p),\ldots,v_1^{d(p)}(s_p),v_2'(s_{p+1}),v_2''(s_{p+1}),\ldots,v_2^{d(p+1)}(s_{p+1}),\ldots,v_2^{d(m)}(s_m)$$

Esta condición es, en realidad, la extensión de la caracterización de punto extremo en Programación Lineal. La diferencia consiste en que, en el caso infinito dimensional, hay dos clases de vectores involucrados en la definición de $V(y)$: los gradientes de las restricciones activas y lo que podríamos llamar «sus derivadas». Visto de esta forma, tendríamos que una restricción activa proporciona más información en un programa semi-infinito que en uno finito. Un comentario análogo puede hacerse acerca de las soluciones factibles básicas no degeneradas que vienen caracterizadas por el siguiente resultado:

Teorema 2.2. *Sea $(y;z)$ una solución factible básica de (PA2), $(y;z)$ es un punto extremo no degenerado si y sólo si la matriz $B(y)$ es invertible.*

Como ya se ha dicho, la solución óptima de (PA2) es un punto extremo, y según se comprueba a continuación, si además verifica la propiedad de que el error máximo de la mejor aproximación se alcanza al menos en $n+1$ puntos de $[\alpha,\beta]$, con signos alternos (que denotaremos por AS), entonces es degenerado. Para nuestro enfoque, esta característica del problema condiciona el tipo de test de optimalidad y los generadores de direcciones factibles de descenso (vease Anderson y Lewis (1989) y León y Vercher (1992a)).

Teorema 2.3. *Supongamos que se cumplen las Hipótesis 1 y 2, que $n \geq 2$ y que la solución óptima cumple la propiedad AS, entonces el óptimo se alcanza en un punto extremo degenerado.*

Demostración. Sea $P^*(x,s)$ la solución óptima del problema de aproximación uniforme. Por verificarse AS, sabemos que existen al menos $n+1$ puntos en S, $s_0 < s_1 < \cdots < s_n$, tales que $h = |P^*(x,s_i) - b(s_i)|$ para $i = 0,1,\ldots,n$, donde h es el error máximo. Si $P^*(x,s) = x_1\,a_1(s) + x_2\,a_2(s) + \cdots + x_n\,a_n(s)$, entonces $y^* = (h,x_1,\ldots,x_n)^T$ es una solución óptima del problema (PA2).

Por el Teorema 4 de Nash (1985) y dado que los coeficientes asociados a las funciones aproximantes son únicos, se tiene que $(y^*;z^*)$ es un punto extremo. La matriz $B(y^*)$ tiene exactamente $n+1$ filas y $|\text{constr}(y^*)| \geq n+1$.

a) Si $|\text{constr}(y^*)| \geq n+2$, entonces $B(y^*)$ tiene al menos $n+2$ columnas.

b) Si $|\text{constr}(y^*)| = n+1$ y $n \geq 2$, entonces existe $s_i \in \text{int}(S)$, tal que s_i es un mínimo local de $z_1^*(\cdot)$ o de $z_2^*(\cdot)$, luego $d(s_i) \geq 1$, y hay en $B(y^*)$ al menos dos columnas ligadas a s_i. Así, pues, $B(y^*)$ tiene al menos $n+2$ columnas.

En cualquier caso, la matriz $B(y^*)$ no es invertible, i.e. $(y^*;z^*)$ es un punto extremo degenerado.

■

No ocurre lo mismo cuando $n=1$ o cuando la solución óptima no verifica la propiedad AS ya que podemos encontrar ejemplos, como el 2.1 y el 2.2, en los que la solución óptima es un punto extremo no degenerado.

Ejemplo 2.1. Consideremos el problema de aproximar $b(s) = s$, mediante $a_1(s) = 1$, para $s \in [0,1]$. El mejor polinomio constante que aproxima $b(\cdot)$ es $P^*(x,s) = 0.5$ y la solución óptima del problema (PA2) es $y^* = (0.5, 0.5)^T$ con $z_1(y^*,s) = 1-s$, $z_2(y^*,s) = s$, $\text{constr}_1(y^*) = \{1\}$, $\text{constr}_2(y^*) = \{0\}$, $d(1) = 0 = d(0)$. Por supuesto, la matriz asociada $B(y^*)$ es invertible e y^* es una solución básica no degenerada.

Ejemplo 2.2. Consideremos la aproximación de la función $b(s) = s^2$ en $[0,2]$, mediante una combinación lineal de las funciones $\{s, \exp(s)\}$. Este es un problema resuelto por Andreasson y Watson (1976) y cuya solución coincide (salvo precisión) con la que hemos obtenido al aplicar nuestro algoritmo:

$$y^* = (0.53824531859082, 0.18423413878873, 0.41863079193405)^T.$$

Se tiene que

$$\text{constr}_1(y^*) = \{2\},\ \text{constr}_2(y^*) = 0.40637642, d(2) = 0, d(0.40637642) = 1$$

y puede comprobarse fácilmente que no se cumple la propiedad AS y que y^* es un punto extremo no degenerado.

Cuando la aproximación uniforme se lleva a cabo mediante el conjunto de polinomios $\{1, s, s^2, \ldots, s^{n-1}\}$ la estructura del problema nos proporciona algunas ventajas. El Lema 2.4 recoge una forma muy simple de descartar que una solución factible sea punto extremo.

Lema 2.4. *Sea $(y;z)$ una solución factible de (PA2) y sean $a_i(s) = s^{i-1}, i = 1, \ldots, n$. Si al menos uno de los conjuntos $\text{constr}_1(y)$ o $\text{constr}_2(y)$ es vacío, entonces $(y;z)$ no es un punto extremo.*

Demostración. Si ambos conjuntos son vacios, la solución factible no tiene restricciones activas y no puede ser un punto extremo. Supongamos que $\text{constr}_1(y) = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ para $k \geq 1$, y $\text{constr}_2(y) = \emptyset$, por definición $v_1\left(s\right) = \left(1, 1, \dots, s^{n-1}\right)^T$, y las dos primeras filas de $B(y)$ coinciden. En el otro caso, si $\text{constr}_1(y) = \emptyset$, las dos primeras filas de $B(y)$ son linealmente dependientes.

■

También puede comprobarse fácilmente que la dirección de descenso $(-1, 1, 0_{n-1})$ es factible para soluciones factibles con $\text{constr}_2(y) = \emptyset$, y que el movimiento a lo largo de ella transforma los mínimos globales positivos de la función de holgura, $z_2(y,s)$, en índices activos para el nuevo punto, sin cambiar el otro conjunto de índices activos. La dirección $(-1, -1, 0_{n-1})$ hace el mismo papel para la función z_1.

Ejemplo 2.3. Encontrar la mejor aproximación de $s^2 - s^4$ en $[-1, 1]$, mediante una recta:

$$\begin{array}{lll} \text{(P)} & \text{Min} & x_0 \\ & \text{s.a.} & x_0 + x_1 + s x_2 \geq s^2 - s^4 \qquad s \in S \\ & & x_0 - x_1 - s x_2 \geq -s^2 + s^4 \quad s \in S \end{array}$$

$y^0 = (1/2, 1/2, 0)^T$ es una solución factible tal que $\text{constr}_1(y^0) = \emptyset$ y $\text{constr}_2(y^0) = \{-1, 0, 1\}$. La dirección $d = (-1, -1, 0)^T$ conduce a $y^* = (1/8, 1/8, 0)^T$, con $\text{constr}_1(y^*) = \{\pm\sqrt{2}/2\}$ y $\text{constr}_2(y^*) = \{-1, 0, 1\}$, que resulta ser la solución óptima del problema.

Con respecto a la solución del problema dual, se tiene que hay un número infinito de soluciones óptimas. Sólo cinco de ellas son básicas y vienen definidas por sus soportes:

$$\begin{array}{ll} (1) & \text{supp}(w_1^1) = \{-\sqrt{2}/2\} \quad \text{y} \quad \text{supp}(w_2^1) = \{-1, 0\}; \\ (2) & \text{supp}(w_1^2) = \{-\sqrt{2}/2\} \quad \text{y} \quad \text{supp}(w_2^2) = \{\pm 1\}; \\ (3) & \text{supp}(w_1^3) = \{\sqrt{2}/2\} \quad \text{y} \quad \text{supp}(w_2^3) = \{\pm 1\}; \\ (4) & \text{supp}(w_1^4) = \{\pm\sqrt{2}/2\} \quad \text{y} \quad \text{supp}(w_2^4) = \{0\}, \quad \text{y} \\ (5) & \text{supp}(w_1^5) = \{\sqrt{2}/2\} \quad \text{y} \quad \text{supp}(w_2^5) = \{0, 1\}. \end{array}$$

Nota. Sea (y^*, z^*) la solución óptima de (PA2), cualquier solución óptima del dual (w_1^*, w_2^*) verifica que $\text{constr}_i(y^*) \supseteq \text{supp}(w_i^*)$ para $i = 1, 2$, por el Teorema de holgura complementaria. Luego, para aquellos problemas en los que $|\text{constr}(y^*)| = n + 1$ hay una única solución óptima del dual. Si $|\text{constr}(y^*)| > n + 1$, entonces el problema dual tendrá al menos dos soluciones factibles básicas óptimas.

Resumiendo, el problema (PA2) tiene una única solución óptima, que es un punto extremo (bajo ciertas condiciones, degenerado), pero el problema dual asociado puede tener más de una solución factible básica óptima, dependiendo del número de restricciones que son activas en la solución óptima del primal.

3. GENERACIÓN DE DIRECCIONES DE BÚSQUEDA

La estrategia que planteamos para resolver el problema (PA2) corresponde a un esquema de descenso con direcciones factibles. Estos métodos construyen una secuencia de soluciones factibles y calculan las direcciones de búsqueda resolviendo diferentes problemas de optimización, habitualmente lineales o cuadráticos. En el contexto de la programación semi-infinita han sido propuestos algoritmos de direcciones factibles que trabajan con ciertos conjuntos de mínimos locales de las funciones de holgura sobre el conjunto de parámetros S, previamente discretizado (vease, por ejemplo, Panier y Tits (1989) y Polak y He (1991)). Esto permite obtener reglas eficientes para el esquema de búsqueda, sin incrementar demasiado el coste computacional.

En nuestro caso, para establecer el criterio de optimalidad y para determinar las direcciones de búsqueda intervienen, no sólo las restricciones activas, sino también el conjunto de índices casi-activos que son mínimos locales sobre el conjunto de parámetros S, que no hemos discretizado:

Definición 3.2. *Sea $(y;z)$ una solución factible para el problema (PA2). Denotamos por $m_\varepsilon(y;z_i)$ el conjunto de índices de las restricciones casi-activas que son mínimos locales de las funciones de holgura z_i, para $i=1,2$, i. e. $m_\varepsilon(y;z_i) = \{s \in S : s$ es un mínimo local de z_i en S y $z_i(y,s) \leq \varepsilon\}$, donde $\varepsilon \geq 0$.*

Hipótesis 3. *Los conjuntos $m_\varepsilon(y;z_i), i=1,2$, son finitos para todo $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ y $\varepsilon \geq 0$.*

Aunque el conjunto $m_\varepsilon(y;z_i)$ podría ser mucho más grande que $\mathrm{constr}_i(y)$, los elementos de $m_\varepsilon(y;z_i)$ tienen un significado específico, para el problema de aproximación, que puede utilizarse para mejorar la eficacia computacional del generador de las direcciones de búsqueda:

Nota. Sea $y=(x_0,x)^T$ una solución factible de (PA2), y sea $E(s)=b(s)-a(s)^T x$ su función de error. Se tiene que $z_1(y,s)=x_0-E(s)$ y $z_2(y,s)=x_0+E(s)$, si elegimos $s_1^* \in m_\varepsilon(y;z_1)\backslash\mathrm{constr}_1(y)$ entonces s_1^* es un máximo local para $E(\cdot)$ y $z_2(y,\cdot)$. Y, en consecuencia, $m_\varepsilon(y;z_1) \cap m_\varepsilon(y;z_2) = \emptyset$.

Por otra parte, sabemos que para $s \in \text{constr}(y)$, la función de error $E(s)$ es positiva si $s \in \text{constr}_1(y)$ y negativa si $s \in \text{constr}_2(y)$. Luego, si queremos que el signo del error $E(\cdot)$ en un punto $s_1^* \in m_\varepsilon(y;z_1)$ (respectivamente $s_2^* \in m_\varepsilon(y;z_2)$) sea positivo (negativo), debemos exigir que $x_0 > z_1(y,s_1^*)$ ($x_0 > z_2(y,s_2^*)$, respectivamente). Esta idea sugiere actualizar ε de modo que siempre sea menor que x_0, con lo que se reduce la dimensión de los problemas que generan las direcciones de búsqueda.

El problema (PA1) satisface, por construcción, la cualificación de restricciones de Mangasarian-Fromovitz, pues podemos avanzar a lo largo de la dirección $u = (1, 0_n)^T$ sin abandonar el conjunto factible. En consecuencia, las condiciones de optimalidad de tipo Karush-Kuhn-Tucker son necesarias y suficientes para caracterizar la solución óptima del problema.

Teorema 3.1. *Sea ε un escalar no negativo. Una solución factible $(y;z)$ del problema (PA2) es óptima si y sólo si el valor objetivo $v(Q_\varepsilon(y)) = 0$, donde*

$$\begin{array}{lll} (Q_\varepsilon(y)) & \text{Min} & d_0 \\ & \text{s.a.} & v_1(s)^T d \geq -z_1(y,s) \quad s \in m_\varepsilon(y;z_1) \\ & & v_2(s)^T d \geq -z_2(y,s) \quad s \in m_\varepsilon(y;z_2) \\ & & -1 \leq d_j \leq 1 \quad j = 0, \ldots, n \end{array}$$

Demostración. Sea $(y;z)$ una solución factible tal que $v(Q_\varepsilon(y)) = 0$ y supongamos que no es óptima. Entonces, existe una solución $(y^\#;z^\#)$ de (PA2) tal que $y_0^\# < y_0$, y el segmento $X = (y, y^\#]$ es un subconjunto de soluciones factibles que cumplen que $y_0' < y_0$, para cada $y' \in X$. Podemos elegir $y' \in X$, tal que $\max\left\{ \left| y_j' - y_j \right|;\ j = 0, 1, \ldots, n \right\} \leq 1$, donde y_j denota la $j-$ésima componente de y, y tomar la dirección $u = y' - y$. Por construcción, $v_i(t)^T u = v_i(t)^T y' - v_i(t)^T y = z_i(y',t) - z_i(y,t) \geq -z_i(y,t)$ para $t \in m_\varepsilon(y;z_i)$ e $i = 1, 2$. Luego, u es una solución factible del problema $(Q_\varepsilon(y))$ y $u_0 = y_0' - y_0 < 0$, con lo que se llega a contradicción.

Recíprocamente, sea $(y;z)$ el óptimo del problema (PA2). Nótese que, para $\varepsilon = 0$: $m_0(y;z_i) = \text{constr}_i(y)$ y tenemos exactamente una condición de optimalidad de tipo Karush-Kuhn-Tucker para (PA2) formulada como un programa lineal, entonces $v(Q_0(y)) = 0$. Además, para todo $0 \leq \varepsilon' < \varepsilon$ se tiene que $0 \leq v(Q_{\varepsilon'}(y)) \leq v(Q_\varepsilon(y))$. Por consiguiente $v(Q_\varepsilon(y)) = 0$, pues $d = 0$ es una solución factible del problema lineal $Q_\varepsilon(y)$.

■

Nota. Para determinar la magnitud de avance máxima μ^* a lo largo de una dirección cualquiera d, es fácil ver que debe calcularse $\mu_i = \inf\{-z_i(y,s)/v_i(s)^T d : \text{para } s \in S$ tal que $v_i(s)^T d < 0\}$, para $i = 1,2$. Si los subconjuntos $S_i := \{s \in S : v_i(s)^T d < 0\}$ son no vacíos para $i = 1,2$, entonces $\mu^* = \min\{\mu_1, \mu_2\}$ y se asegura que el segmento $[y, y + \mu^* d]$ se mantiene factible. Además, si $S_1 = \emptyset$, existe un $s' \in S$ tal que $v_2(s')^T d < 0$, pues el problema (PA2) es acotado y no pueden existir direcciones de recesión para el conjunto factible. En consecuencia, $\mu^* = \mu_2$. Análogamente, si $S_2 = \emptyset$, resulta que $\mu^* = \mu_1$.

Para calcular la magnitud del avance la formulación anterior no es manejable, así que a efectos prácticos la hemos sustituido por otra equivalente. En lo que resta de sección, y sin pérdida de generalidad, supondremos que las direcciones involucradas cumplen que $S_i \neq \emptyset$ para $i = 1,2$ y que se han construido de forma que no se planteen problemas en los índices activos, i.e. si $z_i(y, s^*) = 0$, entonces d se genera de forma que $v_i(s^*)^T d > 0$, para $i = 1,2$.

Lema 3.2. *Supongamos que $(y;z)$ es una solución factible, no óptima, del problema (PA2). Sea $d \in \mathbb{R}^{n+1}$, definimos $\mu_i :=$ inf$\{-z_i(y,s)/v_i(s)^T d :$ para $s \in S$ tales que $v_i(s)^T d < 0\}$ para $i = 1,2$. Entonces $\mu_i = 1/\lambda_i$ donde $\lambda_i =$ sup$\{-v_i(s)^T d/z_i(y,s) : s \in S\}$.*

Demostración. Vamos a comprobar que λ_i para $i = 1,2$ no puede alcanzarse en $s \in S$ tal que $v_i(s)^T d \geq 0$. Sea $L_i(s) := -v_i(s)^T d/z_i(y,s)$, entonces, para cualquier $s \in S$ tal que $v_i(s)^T d \geq 0$, se tiene que:

(a) si $z_i(y,s) > 0$, entonces $L_i(s) \leq 0$, y

(b) si $z_i(y,s) = 0$, por construcción se tiene que $v_i(s)^T d > 0$, entonces $L_i(s) = -\infty$.

Sin embargo para $s \in S$ tal que $v_i(s)^T d < 0$, se tiene que $L_i(s) > 0$, puesto que $z_i(y,s) > 0$. Por tanto, $1/\lambda_i = \inf\{-z_i(y,s)/v_i(s)^T d : s \in S$ tales que $v_i(s)^T d < 0\}$, siendo $\lambda_i = \sup\{L_i(s) : s \in S\}$.

■

Para cada solución factible $(y;z)$ y $\varepsilon \geq 0$, denotamos por $d^*_\varepsilon(y)$ la solución óptima del problema lineal $Q_\varepsilon(y)$. Cuando se comprueba que $(y;z)$ no es la solución óptima del (PA2) parece lógico usar la dirección $d^*_\varepsilon(y)$ como dirección de descenso. Sin embargo, hemos comprobado que en numerosas ocasiones no es factible, pues la amplitud de avance asociada vale cero. Para obviar este problema se resuelve un segundo programa lineal:

$$
\begin{array}{lll}
(Q'_\varepsilon(y,d^*)) & \text{Min} & g_0 \\
 & \text{s.a.} & v_1(s)^T g \geq -z_1(y,s) - 0.75 d_0^* \quad s \in m_\varepsilon(y;z_1) \\
 & & v_2(s)^T g \geq -z_2(y,s) - 0.75 d_0^* \quad s \in m_\varepsilon(y;z_2) \\
 & & -1 \leq d_j \leq 1 \quad j = 0,\ldots,n
\end{array}
$$

donde d_0^* es la primera componente del vector $d_\varepsilon^*(y)$. Si denotamos por $g_\varepsilon^*(y)$ su solución óptima se comprueba que $d := d_\varepsilon^*(y) + g_\varepsilon^*(y)$ es una dirección de descenso que, además, siempre es factible.

Lema 3.3. *Sea (y,z) una solución factible del problema (PA2) y $\varepsilon \geq 0$. Sea $d \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $v_1(s)^T d > -z_1(y,s)$, para $s \in m_\varepsilon(y;z_1)$, y $v_2(s)^T d > -z_2(y,s)$, para $s \in m_\varepsilon(y;z_2)$ y $-1 \leq d_j \leq 1$, para $j = 0,1,\ldots,n$. Entonces, la amplitud de avance máxima a lo largo de d es positiva.*

Demostración. Por el Lema 3.2 sabemos que la amplitud de avance máxima a lo largo de d se calcula como $\mu^* = \min\{\mu_1, \mu_2\}$ y $\mu_i = 1/\lambda_i$ donde $\lambda_i = \sup\{-v_i(s)^T d/z_i(y,s) : s \in S\}$, para $i = 1,2$. Así pues, se trata de asegurar que $\lambda_i < +\infty$, i.e. que las funciones $L_i(s)$ estan acotadas superiormente en S.

Por construcción de d tenemos que $v_i(s')^T d > 0$, para $s' \in \text{constr}(y;z_i)$, luego para cada índice activo s^* existe un entorno abierto $U(s^*)$ en S en el que no se puede alcanzar ese supremo. Para los índices $s \in S$ comprendidos en los subintervalos cerrados restantes, limitados por entornos de índices activos consecutivos, la función $L_i(s)$ está acotada. Y, por la Hipótesis 3, tenemos un número finito de estos subintervalos, luego la función está acotada superiormente en S.

■

Nota. Debido a la estructura del problema (PA2), y siguiendo el lema anterior, puede comprobarse que cualquier vector $d \in \mathbb{R}^{n+1}$, que coincida con $d_\varepsilon^*(y)$ excepto en la primera componente (que podría tomarse como $d_0 = -\gamma d_0^*$, $\gamma \in (0,1)$) serviría como dirección «auxiliar», de modo que sumándola a $d_\varepsilon^*(y)$ permite obtener una dirección factible de descenso. Sin embargo, hemos implementado la construcción de la dirección de búsqueda a partir de $d_\varepsilon^*(y) + g_\varepsilon^*(y)$, pues podrá utilizarse para resolver problemas más generales que el (PA2).

4. DESCRIPCIÓN DE LOS ALGORITMOS

Vamos a describir un esquema de direcciones factibles con un generador de direcciones de búsqueda basado en los resultados de la Sección 3, que nos asegura la factibilidad de todos los iterados si partimos de una solución factible inicial y la disminución del valor de la función objetivo del problema (PA2).

Se pueden conseguir diferentes implementaciones del método dependiendo de la forma de actualizar el parámetro ε. Valores pequeños de ε reducen el número de restricciones que definen el problema $Q_\varepsilon(y)$, y valores suficientemente grandes hacen que el conjunto $m_\varepsilon(y;z_i)$ contenga todos los mínimos locales y el algoritmo no se vea afectado por índices que entran y salen alternativamente de dicho conjunto. Hemos trabajado fijando $\varepsilon = \infty$, así como con otras estrategias que hacen tender a cero el valor de ε mediante actualizaciones adecuadas. Se ha comprobado que la actualización más eficiente, y también más robusta, para variaciones de la solución factible inicial, es la de elegir $\varepsilon = x_0$ para $y = (x_0, x)$. Así, pues, hemos llamado método A1 al que funciona del modo siguiente:

Método A1.

Inicialización. Elegir una solución factible $(y^1; z(y^1, s)) \in \mathbb{R}^{n+1}\, xC(S)^2$ de (PA2), $\delta > 0$ y hacer $k = 1$.

Etapa 1. Para $y^k = (x_0, x)$, tomar $\varepsilon_k = x_0$ y calcular $m_{\varepsilon k}(y^k; z_i(y^k, s))$ para $i = 1, 2$.

Etapa 2. Calcular $d^*(y^k) = (d_0^*, d_1^*, \dots, d_n^*)$ una solución óptima del problema lineal $Q_{\varepsilon k}(y^k)$.
Si $d_0^* < -\delta$, STOP. En otro caso, ir a la Etapa 3.

Etapa 3. Calcular $\mu^*(y^k) = \min\{\mu_1, \mu_2\}$, siendo
$\mu_i = \inf\{-z_i(y^k, s)/v_i(s)^T d^*(y^k)$: para $s \in S$ tal que $v_i(s)^T d^*(y^k) < 0\}$, para $i = 1, 2$.
Si $\mu^*(y^k) > 0$, hacer $y^{k+1} = y^k + \mu^*(y^k) d^*(y^k), k = k + 1$ y volver a la Etapa 1.
En otro caso, ir a la Etapa 4.

Etapa 4. Calcular $g^*(y^k)$, solución óptima del problema lineal $Q'_{\varepsilon k}(y^k, d^*)$.
Hacer $d^*(y^k) = d^*(y^k) + g^*(y^k)$ e ir a la Etapa 3.

Nota. En la Etapa 3 se determina aquel valor μ^* que incorpora al menos una nueva restricción al conjunto de los ceros de las funciones de holgura. Se ha visto en el Lema 3.3 que la dirección generada en la Etapa 4 tiene asociada una amplitud de avance máxima que es positiva. Así pues, el algoritmo no puede ciclarse.

Dado que la solución óptima del problema (PA2) es un punto extremo, nos decidimos a incluir en el anterior esquema de direcciones factibles una etapa de purificación que, utilizando los resultados de la Sección 2, proporciona una solución factible básica. Hemos comprobado que esta etapa interna acelera la disminución del valor objetivo en las etapas iniciales. Cuando la cardinalidad del conjunto $m_\varepsilon(y;z)$ y la localización de los mínimos locales se fija en torno a los valores que corresponden a la solución óptima, el método A1 puede evolucionar directamente de un punto extremo a otro.

Nos planteamos si debía ejecutarse la etapa de purificación para cada iterado que no sea solución factible básica o sólo cada cierto número de iteraciones y hemos comprobado que es más eficiente este segundo criterio. El estudio comparativo realizado en León, Sanmatías y Vercher (1996) muestra claramente la ventaja de purificar cada $n+1$ iteraciones. Los resultados computacionales para una gran cantidad de instancias mostraban un ahorro del 33% en el número de iteraciones al utilizar este criterio. Así pues, se ha implementado un método híbrido, que llamamos método A2, que combina etapas de purificación con el generador de direcciones de búsqueda anterior.

Método A2.

Inicialización. Elegir una solución factible $(y^1; z(y^1,s)) \in \mathbb{R}^{n+1}xC(S)^2$ de (PA2), tomar $\varepsilon = \infty$, $\delta > 0$ y $N > 1$, hacer $Y = y^1$ y $k = 1$.

Etapa Interna. Calcular constr(Y). Si $V(Y) \neq \{0_{n+1}\}$ aplicar un algoritmo de purificación hasta llegar a un punto extremo $(y^k; z(y^k,s))$.

Etapa 1. Para $y^k = (x_0, x)$, tomar $\varepsilon_k = x_0$ y calcular $m_{\varepsilon k}(y^k; z_i(y^k,s))$ para $i = 1,2$.

Etapa 2. Calcular $d^*(y^k) = (d_0^*, d_1^*, \ldots, d_n^*)$, una solución óptima del problema lineal $Q_{\varepsilon k}(y^k)$.
Si $d_0^* < -\delta$, STOP. En otro caso, ir a la Etapa 3.

Etapa 3. Calcular $\mu^*(y^k) = \min\{\mu_1, \mu_2\}$, siendo
$\mu_i = \inf\{-z_i(y^k,s)/v_i(s)^T d^*(y^k)\colon$ para $s \in S$ tal que $v_i(s)^T d^*(y^k) < 0\}$, para $i = 1,2$.
3.1. Si $\mu^*(y^k) > 0$, hacer $y^{k+1} = y^k + \mu^*(y^k) d^*(y^k)$.
Si $k < N$, hacer $k = k+1$ y volver a la Etapa 1.
Si $k = N$ hacer $Y = y^{k+1}$, $k = 1$ y volver a la Etapa Interna.
3.2. Si $\mu^*(y^k) = 0$, ir a la Etapa 4.

Etapa 4. Calcular $g^*(y^k)$, solución óptima del problema lineal $Q'_{\varepsilon k}(y^k, d^*)$.
Hacer $d^*(y^k) = d^*(y^k) + g^*(y^k)$ y volver a la Etapa 3.

En resumen, el método A2 encuentra un punto extremo como solución inicial, ejecuta durante N iteraciones un esquema de direcciones factibles y para proseguir comprueba si el iterado $N-$ésimo es punto extremo, i.e. la etapa interna de purificación se aplica cada N iteraciones del método. Para realizar esta etapa interna hemos extendido un algoritmo de purificación (León y Vercher (1992b)) que estaba diseñado para una única función de holgura y que encuentra un punto extremo del problema (PA2) como máximo en $(n+1)$ iteraciones a partir de cualquier solución factible.

Pensando en la aplicación de este esquema híbrido para la resolución de problemas más generales, hemos programado una versión del método A2 que no actualiza el parámetro ε, y lo hemos llamado método A3. No hemos considerado necesario introducir su esquema algorítmico, pues la única diferencia con el anterior es que en cada iteración se utilizan todos los mínimos locales para generar las direcciones de búsqueda.

5. RESULTADOS NUMÉRICOS

Todos los métodos se han implementado en lenguaje C en un ordenador personal HP Vectra VL4/100 y funcionan con doble precisión. Respecto a los parámetros introducidos, queremos señalar que: el criterio de parada que hemos utilizado es $\delta = 10^{-10}$; un mínimo local se considera un cero de una función de holgura cuando su valor es menor que la precisión standard 10^{-8}; y hemos tomado $N = n+1$, pues se ha considerado el papel de la etapa interna de purificación como una especie de «restart» del método de direcciones factibles.

En todos los métodos se calcula el conjunto de mínimos locales, $m_\varepsilon(y; z_i)$, utilizando un algoritmo de búsqueda multi-local unidimensional (León, Sanmatías y Vercher (1998)), que resuelve también eficientemente el cálculo de la amplitud de avance en la Etapa 3.

Las direcciones de búsqueda $d^*_\varepsilon(y), g^*_\varepsilon(y)$ y el valor de la función objetivo $v(Q_\varepsilon(y))$ se obtienen resolviendo los programas lineales correspondientes mediante subrutinas de CPLEX Callable Library. Asimismo, las direcciones de búsqueda del algoritmo de purificación se calculan utilizando estas subrutinas de CPLEX. Hay que señalar que en el contador de iteraciones de los métodos A2 y A3 están incluidas las búsquedas-iteraciones realizadas en la etapa interna de purificación.

Para comparar el comportamiento de los métodos introducidos hemos resuelto algunos problemas de aproximación, y presentamos los resultados obtenidos en las tablas siguientes. En la primera columna aparecen las características de cada problema resuelto y la solución inicial utilizada: $y = (M, 0_n)$, siendo M una cota superior de $|b(s)|$ en S. Las otras columnas incluyen: el número de iteraciones (#iter); el número de evaluaciones de las funciones de holgura (#eval_z); el tamaño medio de los problemas lineales resueltos (PL_mean) y el valor de la función objetivo del problema (PA2) en el óptimo (error_máximo). En los problemas de la Tabla 1 el conjunto de funciones aproximantes es el de los polinomios de grado menor que n: $\{1, s, s^2, \ldots, s^{n-1}\}$. Para los problemas de la Tabla 2 se han utilizado diferentes conjuntos de funciones aproximantes: $\{\sin(s),\ \cos(s)\}$, $\{1, s, \sin(s), \cos(s)\}$, $\{1, s, s^2, s^3, \sin(s), \cos(s)\}$ y $\{1, s, 2s^2-1, 4s^3-3s, 8s^4-8s^2+1, 16s^5-20s^3+5s\}$, respectivamente.

Realmente, el mayor esfuerzo computacional se hace al calcular la amplitud de avance $\mu^*(y)$, pues las direcciones de búsqueda (tanto en la etapa interna como en la Etapa

2) se obtienen como solución de problemas lineales de tamaño menor que $n+2$, lo que se corresponde con la cardinalidad del conjunto de mínimos locales. En las primeras iteraciones hay relativamente pocos mínimos locales, posteriormente este número tiende hacia la cardinalidad del conjunto $\text{constr}(y^*)$, donde y^* es el óptimo.

Tabla 1

$b(s), S, n, y^0$	método	#iter	eval_z	PL_mean	error_máximo
$\sin(s), [0,1]$	A1	18	936	3.13	.000155410916
$n=4$	A2	20	1179	3.69	.000155406095
$(\sin(1), 0)$	A3	12	699	3.35	.000155407474
$\cos(s), [-1,1]$	A1	23	1843	4.37	.000041877535
$n=5$	A2	25	2124	4.89	.000041879797
$(1,0)$	A3	16	1301	5.16	.000041898024
$1/1+s^2, [0,1]$	A1	29	2328	4.78	.000521989105
$n=5$	A2	24	1797	4.19	.000521989396
$(1,0)$	A3	19	1504	4.45	.000522046387
$\tan(s), [-1,1]$	A1	22	2506	6.24	.002602827389
$n=6$	A2	35	3293	4.87	.002628279523
$(\tan(1), 0)$	A3	15	1857	6.04	.002602824791
$1-\exp(-s^2)$	A1	50	5733	5.48	.014256567265
$[-2,2], n=7$	A2	35	4544	6.29	.014256566041
$(b(2), 0)$	A3	18	2725	7.61	.014256634097

Tabla 2

$b(s), S, n, y^0$	método	#iter	eval_z	PL_mean	error_máximo
$1/1+s^2, [0,1]$	A1	11	389	2.53	.030554447874
$n=2$	A2	7	303	2.40	.030554446088
$(1,0)$	A3	6	257	3.11	.030554466387
$1/1+s^2, [0,1]$	A1	20	1120	4.00	.002099731524
$n=4$	A2	18	986	3.48	.002099728652
$(1,0)$	A3	13	757	3.70	.002099741233
$1-\exp(-s2^{)}$	A1	12	1227	5.47	.054222163691
$[-2,2], n=6$	A2	25	2446	5.16	.054222163691
$(b(2), 0)$	A3	18	1663	5.39	.054222195516
$1-\exp(-s^2)$	A1	40	4227	5.07	.163381197911
$[-3,3], n=6$	A2	64	6328	5.03	.163381193882
$(b(3), 0)$	A3	30	2560	5.11	.163381228959

Ya se había indicado que el método A1 era el más eficiente para diferentes actualizaciones del parámetro ε, incluido $\varepsilon = \infty$. Añadirle una etapa interna de purificación no resulta demasiado ventajoso, aunque en algunos problemas pueda dar mejor resultado. Una posible explicación de este comportamiento es que se están aplicando dos criterios que producen efectos contrarios dentro del mismo método A2: por una parte, reducir el número de restricciones casi-activas (por debajo de x_0) y, por otra, completar el número de ceros (en la etapa interna) para alcanzar un punto extremo.

En cambio, el método A3, que genera las direcciones de búsqueda utilizando todos los mínimos locales, y que también aplica la etapa de purificación cada cierto número de búsquedas, es el más eficiente de entre todos los métodos que hemos programado. El método A3 necesita menos iteraciones para llegar a la solución óptima y la encuentra con menor coste computacional. También se ha comportado mejor que una implementación anterior en la que aplicábamos la etapa interna a cada solución factible no básica.

La comparación con los resultados obtenidos por otros algoritmos primales de programación semi-infinita para resolver el problema (PA2) puede ser poco representativa, pues esos métodos incorporan una etapa previa de discretización del conjunto S y luego resuelven el problema finito resultante mediante diferentes esquemas (p.e. punto interior en Ferris y Philpott (1989), refinamiento de la discretización en Hettich y Gramlich (1990)). Otra dificultad adicional radica en la diferencia de precisión utilizada y en el hecho de que no se indican las soluciones iniciales.

Tabla 3

$b(s), S, n, y^0$	método	#iter	eval_z	PL_mean	error_máximo
$s^2, [0,2]$					
$n = 2$	NEW	11	13420	62	0.53824312
$(x_0, 1, 1)$	A3	19	499	1987	0.5382453186
$\sin(s), [0,1]$					
$n = 3$	NEW	7	8920	50	0.00450552
$(x_0, 1, 1, 1)$	A3	9	406	848	0.0045050895

En el trabajo de Zhou y Tits (1996) se introduce un algoritmo de programación cuadrática secuencial, que resuelve problemas continuos minimax para una discretización fina (501 puntos equidistantes) del intervalo S y dos de los problemas planteados son de la forma (PA1). El primero coincide con el Ejemplo 2.2 y el segundo consiste en aproximar la función $\sin(s)$ utilizando los polinomios $\{1, s, s^2\}$. En la Tabla 3 incluimos los resultados obtenidos con su algoritmo NEW, el más eficiente de los presentados, y añadimos el número de evaluaciones de las derivadas de las funciones de holgura (#eval_zd). El comportamiento del método A3 ha sido muy diferente para estos dos problemas. En el Ejemplo 2.2 ha sido computacionalmente costoso mantener la factibilidad de cada iterado en un entorno del índice $s = 0.40637642$ para la función de holgura z_2 —donde $L_2(s)$ presenta una discontinuidad evitable—. Se ha calculado la amplitud de avance máxima con mucha precisión para evitar la imposibilidad primal, y ese esfuerzo queda reflejado claramente en la columna #eval_zd. Este problema no se presenta cuando se está trabajando con un subconjunto discreto de S.

Pensamos que el método A3 puede ser eficiente también para resolver otros problemas semi-infinitos lineales, pues tanto el esquema que genera las direcciones factibles como la etapa de purificación son generales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] **Anderson, E.J.** y **Lewis, A.S.** (1989). «An extension of the simplex algorithm for semi-infinite linear programming». *Mathematical Programming*, **44**, 247–269.

[2] **Anderson, E.J.** y **Nash, P.** (1987). *Linear Programming in infinite-dimensional spaces*. John Wiley and Sons, Chichester.

[3] **Andreasson, D.O.** y **Watson, G.A.** (1976). «Linear Chebyshev approximation without Chebyshev sets». *BIT*, **16**, 349–362.

[4] **Cheney, E.W.** (1966). *Introduction to Approximation Theory*. McGraw-Hill, New York.

[5] **Ferris, M.C.** y **Philpott, A.B.** (1989). «An interior point algorithm for semi-infinite linear programming». *Mathematical Programming*, **43**, 257–276.

[6] **Glashoff, K.** y **Gustafson, S.A.** (1983). *Linear Optimization and Approximation.* Springer Verlag, New York.

[7] **Hettich, R.** y **Gramlich, G.** (1990). «A note on an implementation of a method for quadratic semi-infinite programming». *Mathematical Programming*, **46**, 249–254.

[8] **Hettich, R.** y **Kortanek, K.O.** (1993). «Semi-infinite Programming: Theory, Methods and Applications». *SIAM Review*, **35**, 380–429.

[9] **León, T., Sanmatías, S.** y **Vercher, E.** (1996). «Some semi-infinite programming algorithms for solving the Linear Chebyshev Approximation Problem». *Technical Report*, **#3-96**. Depart. Estadística e Investigación Operativa. Universitat de València.

[10] **León, T., Sanmatías, S.** y **Vercher, E.** (1998). «A multi-local optimization algorithm». Aparecerá en *Top*.

[11] **León, T.** y **Vercher, E.** (1992a). «An optimality test for semi-infinite linear programming». *Optimization*, **26**, 51–60.

[12] **León, T.** y **Vercher, E.** (1992b). «A purification algorithm for semi-infinite programming». *European Journal of Operational Research*, **57**, 412–420.

[13] **León, T.** y **Vercher, E.** (1994). «New descent rules for solving the linear semi-infinite programming problem». *Operations Research Letters*, **15**, 105–114.

[14] **Nash, P.** (1985). «Algebraic fundamentals of linear programming». *Infinite Programming*, Edited by E.J. Anderson and A.B. Philpott, Springer, Berlin, 37–52.

[15] **Panier, E.** y **Tits, A.** (1989). «A globally convergent algorithm with adaptively refined discretization for Semi-Infinite Optimization Problems arising in Engineering Design». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **34**, 903-908.

[16] **Polak, E.** y **He, L.** (1991). «Unified Steerable PhaseI-Phase II Method of feasible Directions for Semi-Infinite Optimization». *Journal of Optimization Theory and Applications*, **69**, . 83–107.

[17] **Powell, M.J.D.** (1981). *Approximation Theory and Methods*. Cambridge University Press, Cambridge.

[18] **Zhou, J.L.** y **Tits A.L.** (1996). «An SQP algorithm for finely discretized continuous minimax problems and other minimax problems with many objective functions». *SIAM J. Optimization*, **6**, 461–487.

ENGLISH SUMMARY

A PRIMAL SEMI-INFINITE PROGRAMMING METHOD FOR THE UNIFORM APPROXIMATION PROBLEM*

T. LEÓN
S. SANMATÍAS
E. VERCHER
Universitat de València*

In this paper we develop an algorithm that solves the classic uniform approximation problem formulated as a semi-infinite program. We have studied the algebraic characterization of extreme points and proved some of their properties. We have designed a procedure that generates feasible directions by solving certain linear programs, that also characterize the optimum. The method incorporates a purification algorithm to proceed from a feasible solution to an improved extreme point. Finally, we show the good performance of the algorithm at a number of numerical examples.

Keywords: Semi-infinite programming, uniform approximation, extreme points, feasible direction methods.

AMS Classification: 90C34, 41A50, 49M35

* This work has been supported by the Ministerio de Educación y Ciencia, España, DGICYT, PB93-0703.
* Departament d'Estadística i Investigació Operativa. Facultat de Matemàtiques. Universitat de València. C/ Dr. Moliner, 50. 46100 Burjassot (Valencia).
– Received June 1997.
– Accepted March 1998.

1. INTRODUCTION

The uniform approximation problem can be stated as follows: given a continuous function $b(\cdot)$ defined on $[\alpha, \beta]$, our interest is to approximate it by a linear combination of a given set of continuous functions $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ also defined on $[\alpha, \beta]$. Under certain conditions it has been shown that the maximum error in the best approximation occurs at least at $n+1$ points in $[\alpha, \beta]$, with alternating sign and that this best approximation is unique. There are some ascent methods that solve it by using the above property (see Powell (1981), for instance).

So, the objective is to minimize the maximum difference between the function $b(\cdot)$ and the approximating function

$$P(x,s) := x_1\, a_1(s) + x_2\, a_2(s) + \cdots + x_n\, a_n(s), \quad \text{where} \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R},$$

that is to minimize the maximum error $x_0 := \max |b(s) - P(x,s)|$. It is well known that this problem can be written as a semi-infinite program:

$$\begin{array}{lll} \text{(PA1)} & \text{Minimize} & x_0 \\ & \text{s.a.} & x_0 + a(s)^T x \geq b(s) \\ & & x_0 - a(s)^T x \geq -b(s) \\ & & x_0 \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad s \in [\alpha, \beta] \end{array}$$

The approximation problems and its applications provide a broad class of semi-infinite programming problems (see for instance Hettich and Kortanek (1993)).

2. EXTREME POINTS

Nash (1985) defines, in an algebraic framework, the fundamental objects and operations of linear programming posed in infinite dimensional spaces. Indeed, he extends the definitions of degenerate and non degenerate basic feasible solution, reduced costs and pivoting of finite linear programming to the infinite dimensional case. We have studied the adaptation of their characterizations of degenerate and non degenerate basic feasible solutions for our problerm and we have derived some properties concerning to them.

Our main result in this section, Theorem 2.3, shows that, under certain mild conditions and $n \geq 2$, the optimal solution of the semi-infinite problem (PA1), stated in the standard LP form, is a degenerate extreme point.

3. SEARCH DIRECTION FINDING SCHEME

We give a feasible directions scheme that constructs a sequence of feasible solutions by solving finite linear programs. The search direction computation takes into account the gradients of the near-binding local minimizer constraints for the current iterate and it uses a *Karush-Kuhn-Tucker* type optimality criterion.

Let us denote by $y = (x_0, x)$, $v_1(s) = (1, a_1(s), a_2(s), \ldots, a_n(s))^T$, $v_2(s) = (1, -a_1(s), -a_2(s), \ldots, -a_n(s))^T$ for $s \in S$. Then we have the following result:

Theorem 3.1. *Let ε be a non negative scalar, then a feasible solution $(y;z)$ is optimal if and only if the objective function value $v(Q_\varepsilon(y)) = 0$, where*

$$\begin{array}{lll} (Q_\varepsilon(y)) & \text{Min} & d_0 \\ & \text{s.a.} & v_1(s)^T d \geq -z_1(y,s) \quad s \in m_\varepsilon(y;z_1) \\ & & v_2(s)^T d \geq -z_2(y,s) \quad s \in m_\varepsilon(y;z_2) \\ & & -1 \leq d_j \leq 1 \quad j = 0, \ldots, n \end{array}$$

where $z_1(\cdot)$ and $z_2(\cdot)$ are the slack functions defined as: $z_1(y,s) = v_1(s)^T y - b(s)$, $z_2(y,s) = v_2(s)^T y + b(s)$ for $s \in S$, and $m_\varepsilon(y;z_i)$ denotes the set of indices of near-binding constraints that are local minima of the slack function $z_i(\cdot)$ for $i = 1,2$, that is $m_\varepsilon(y;z_i) = \{s \in S : s \text{ is a local minimizer of } zi \text{ in } S \text{ and } z_i(s) \leq \varepsilon\}$.

For computational reasons, we assume that $m_\varepsilon(y;z_i)$ is finite for all $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ and $\varepsilon \geq 0$. The analytical functions, for instance, satisfy this assumption.

At each iteration the algorithm solves the LP problem above, for a feasible point $(y;z)$ and $\varepsilon \geq 0$. Let $d_\varepsilon^*(y)$ indicate the optimal solution of $(Q_\varepsilon(y))$. It is accepted that the main drawback to obtain an efficient primal method for semi-infinite linear programming problems is in the computation of the maximum steplenght $\mu^*(y)$. Concerning to this question, we have proved the following result:

Lemma 3.2. *Suppose that $(y;z)$ is a non-optimal feasible solution, and $d_\varepsilon^*(y)$ is an optimal solution of $(Q_\varepsilon(y))$. Let $\mu_i = inf\{-z_i(y,s)/v_i(s)^T d_\varepsilon^*(y)$: for $s \in S$ such that $v_i(s)^T d_\varepsilon^*(y) < 0\}$, then $\mu_i = 1/\lambda_i$ where $\lambda_i = max\{-v_i(s)^T d_\varepsilon^*(y)/z_i(y,s) : s \in S\}$ for $i = 1,2$.*

In some cases, the maximum steplength along $d_\varepsilon^*(y)$ could be zero. So, we must construct a suitable perturbation of the direction in order to guarantee the movement in the neighbourhood of (y,z) without encountering a boundary. This modification is, in fact, the addition of another vector obtained through the solution of a finite LP subproblem.

4. DESCRIPTION OF THE ALGORITHMS

First, we consider a pure feasible directions scheme, based on Theorem 3.1 as the generator of search directions. Depending on the updating rules for ε, we obtain diferent versions of the method. After an empirical study, we decided that the best choice is setting $\varepsilon = x_0$, for $y = (x_0, x)$, to give that we call method A1.

With the aim of deciding if the addition of a purification step implies some improvement over method A1, we have implemented a version of the method that includes it. A purification step can be performed every time we get a non basic feasible solution or after a certain number (fixed or not) of iterations, and its efficacy is quite different. We stated method A2 in such a way that it finds an extreme point through an initial feasible solution, then along N iterations it uses a pure feasible-direction scheme and it checks whether the $N+1$ iterate is an extreme point, otherwise a purification step is performed, and so on. Hence it applies the purification step at most every N iterations, where $N = n+1$ is the dimension of the vector y.

We have called method A3 to a modification of method A2 that sets $\varepsilon = \infty$, that is it does not update ε at each iteration.

5. NUMERICAL RESULTS

In order to compare the performance of the methods we have made some numerical experiments. We present our results at three tables in which some relevant characteristics appear. We could say that method A3 is the most efficient, in the sense that it needs less iterations to find the optimum. Moreover this method could be also useful for solving other semi-infinite linear programming problems, because both the direction generating scheme and the purification step have been stated in a general form.