

ANÁLISIS DE DETECCIÓN DE RAÍCES UNITARIAS EN SERIES DE TIEMPO. UN ENFOQUE METODOLÓGICO CON TESTS NO SIMILARES

JOSÉ ÁNGEL ROLDÁN CASAS
RAFAELA DIOS PALOMARES
Universidad de Córdoba*

El presente artículo recoge los resultados de una investigación llevada a cabo con el fin de analizar, desde la perspectiva de la no similaridad, las distribuciones de los distintos estadísticos planteados por Dickey y Fuller para contrastar la presencia de raíz unitaria. Asimismo, se definen zonas de rechazo y aceptación de las hipótesis nulas para cada estadístico, considerando las distintas distribuciones del mismo, y se estudian las situaciones con las que nos podemos encontrar de cara a deducir una pauta de comportamiento que minimice el riesgo de error. Se presenta un ejemplo en el que se pone de manifiesto que la no similaridad de los contrastes tradicionales de raíz unitaria nos puede llevar a tomar una decisión equivocada. Teniendo en cuenta dicha no similaridad, se propone una estrategia de contraste secuencial para resolver situaciones de indecisión acerca del rechazo o no de la existencia de raíz unitaria. Finalmente, se lleva a cabo un experimento Monte Carlo para determinar empíricamente la probabilidad de que el valor calculado de los estadísticos implicados en el contraste caigan en las diferentes zonas planteadas.

Testing for unit roots in time series: An analysis with non similar tests

Palabras clave: Raíz unitaria, tendencia estocástica, test no similar, test de Dickey-Fuller, experimento Monte Carlo

Clasificación AMS (MSC 2000): 62M10

*Universidad de Córdoba. Dpto. de Estadística e Investigación Operativa. E.S.I.A y de Montes.
Apartado 3048. 14080 Córdoba.

–Recibido en marzo de 1998.
–Aceptado en marzo de 2000.

1. INTRODUCCIÓN

Una de las prácticas econométricas más usadas en Modelización y Predicción Económica es el Análisis de Series de Tiempo, tanto desde el punto de vista clásico como desde el enfoque Box-Jenkins. Es muy frecuente, además, que una serie cronológica presente tendencia que puede ser de dos tipos: estocástica y/o determinista.

La tendencia estocástica hace que la serie permanezca largos períodos de tiempo por encima o por debajo de su valor central, reflejando así la no estacionariedad en media de la misma. Por ejemplo, una serie con tendencia estocástica podría ser la generada por el proceso $Y_t = Y_{t-1} + e_t$, donde e_t es una serie estacionaria. Este proceso es no estacionario debido a la presencia de una raíz unitaria en su parte autorregresiva. De esta forma, si diferenciamos Y_t , resulta una serie, que ya sería estacionaria y, por tanto, podría ser modelizada mediante la metodología Box-Jenkins. Es por este motivo que se establece como práctica necesaria en el Análisis de Series de Tiempo, el contraste sobre la presencia de raíces unitarias en la serie original. Una práctica habitual es utilizar el correlograma de la serie para determinar la posible presencia de raíz unitaria. Una caída lineal de las autocorrelaciones estimadas sería, en principio, un indicio de existencia de raíz unitaria.

La tendencia determinista, en cambio, es una cadencia temporal, lineal o no, que por sus características se puede estimar con más o menos precisión. Si se sustrae dicha tendencia de la serie original se obtiene la componente puramente estocástica de la misma. Una serie con tendencia determinista generada con el modelo $Y_t = \mu + \beta t + e_t$ (con e_t ruido blanco), en principio, debe presentar un correlograma con una caída exponencial. No obstante, en ocasiones, el dominio de la tendencia determinista lineal sobre la componente estocástica es tal, que el correlograma presenta una caída lineal, lo que podría llevarnos a la idea equivocada de existencia de raíz unitaria.

Por tanto, la simple observación del gráfico o correlograma de una serie, es una buena forma para detectar la no estacionariedad de dicha serie, pero no siempre es válido para distinguir si la tendencia que muestra la serie es de naturaleza determinista o estocástica. Por ello, se hace necesaria la aplicación de un test que nos permita discernir entre una tendencia y otra.

Los contrastes de raíz unitaria pioneros en la literatura, se deben a Fuller (1976), y Dickey y Fuller (1979). Estos autores propusieron un método simple para contrastar la existencia de una raíz unitaria en una serie temporal Y_t que puede venir generada por tres mecanismos autorregresivos de orden 1 diferentes:

$$\begin{aligned}
(1) \quad & Y_t = \rho Y_{t-1} + e_t & t = 1, 2, \dots \\
(2) \quad & Y_t = \mu + \rho Y_{t-1} + e_t & t = 1, 2, \dots \\
(3) \quad & Y_t = \mu + \beta t + \rho Y_{t-1} + e_t & t = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

donde $Y_0 = 0$ y e_t es una secuencia de variables aleatorias independientes y normalmente distribuidas con media cero y varianza σ^2 (NID(0, σ^2) en lo sucesivo). El factor diferenciador en los modelos anteriores es la presencia o ausencia de elementos deterministas. En los tres casos, el test que proponen permite contrastar la hipótesis de que $\rho = 1$, o lo que es igual, la hipótesis de existencia de raíz unitaria en la parte autorregresiva del modelo en cuestión. El contraste se basa en la estimación por mínimos cuadrados ordinarios (MCO) del parámetro ρ en (1), (2) o (3). Esta estimación convenientemente normalizada y su estadístico t asociado para $\rho = 1$, son los estadísticos que Dickey y Fuller (1979) proponen para llevar a cabo el contraste. Estos dos estadísticos no tienen una distribución conocida bajo la hipótesis nula ($\rho = 1$), por lo que Dickey y Fuller dedujeron las distribuciones empíricas de los mismos, mediante métodos de simulación.

La independencia y homocedasticidad del término de error son supuestos muy restrictivos y no muy acordes con la realidad, pues, en la práctica, muchas series económicas presentan una estructura algo más compleja. En este sentido, Dickey y Fuller (1981) desarrollaron el contraste de raíz unitaria asumiendo que el proceso generador de datos era un proceso AR(p) (es lo que se conoce como Dickey-Fuller Aumentado o DFA).

Posteriormente, Said y Dickey (1984) extendieron el DFA al caso de un proceso ARMA(p, q) con p y q desconocidos, que, a lo sumo, contiene una raíz unitaria en su parte autorregresiva. También, para un ARMA(p, q), Solo (1984) desarrolla un procedimiento de contraste basado en el test de los multiplicadores de Lagrange. En esta misma línea, Phillips (1987) propone un procedimiento alternativo al DFA, consistente en una corrección no paramétrica de los estadísticos de Dickey y Fuller, que permite llevar a cabo el contraste de raíz unitaria en (1) teniendo en cuenta un cierto grado de dependencia y heterocedasticidad en el término de error. Phillips y Perron (1988) extendieron este procedimiento a los procesos (2) y (3). No obstante, todos estos contrastes presentan considerables distorsiones en el tamaño debido a la presencia de términos de medias móviles en el modelo a estimar (ver Schwert (1989)). Como alternativa, Hall (1989, 1992) y Pantula y Hall (1991) proponen estimar el modelo correspondiente, por variables instrumentales.

Otra crítica que se suele hacer a los tests de raíz unitaria es la falta de consistencia entre la hipótesis nula y la alternativa de dichos contrastes, en relación al tipo de tendencia determinista que presenta el proceso bajo cada una de las hipótesis. Los parámetros de los diferentes modelos que se consideran como posibles mecanismos generadores de la serie objeto de análisis, tienen un significado diferente según sea cierta o no la hipótesis

nula. Para alcanzar esta consistencia entre las hipótesis, autores como Dickey (1984) y Barghava (1986), entre otros, utilizan una parametrización diferente a (1), (2) y (3) para representar el proceso generador de datos:

$$(4) \quad \begin{aligned} Y_t &= \mu^* + \beta^* t + u_t \\ u_t &= \rho u_{t-1} + e_t \quad t = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

donde $e_t \sim \text{NID}(0, \sigma^2)$ y u_0 es una variable aleatoria independiente de e_t . Esta parametrización permitió a Bhargava (1986) desarrollar los contrastes de raíz unitaria invariantes más potentes frente a determinadas alternativas, tomando como base al trabajo de Sargan y Barghava (1983). Asimismo, Schmidt y Phillips (1992) proponen contrastar la hipótesis nula de raíz unitaria aplicando en (4) el test de los multiplicadores de Lagrange, procedimiento que Ahn (1993) generalizó para el caso en que u_t es un proceso autorregresivo de medias móviles. Hwang y Schmidt (1996) desarrollan un test de raíz unitaria estimando (4) por mínimos cuadrados generalizados.

Otro de los inconvenientes que presentan algunos de estos contrastes, es que se basan en estadísticos cuyas distribuciones bajo la hipótesis nula (raíz unitaria) dependen de los valores que tomen otros parámetros (molestos) que intervienen en el modelo, es decir, son tests no similares¹. Esta no similaridad se refleja en la baja potencia que presentan en algunas de las alternativas, provocando graves errores en la toma de decisión sobre la presencia de raíz unitaria en la serie. Evidencia de este hecho es el trabajo de Nelson y Plosser (1982) en el que estudiaban las raíces unitarias presentes en diversas series económicas de los Estados Unidos y que posteriormente Choi (1990) revisó, encontrando que se habían detectado erróneamente raíces unitarias en la mayoría de estas series. En el campo de la similaridad encontramos diversos trabajos. Por un lado, Evans y Savin (1984) y Nankervis y Savin (1985), tras constatar la no similaridad de los estadísticos en los que se basan los tests de Dickey-Fuller, desarrollan varios tests no similares para contrastar la hipótesis de raíz unitaria en un modelo autorregresivo de primer orden con constante. Por otro lado, Kiviet y Phillips (1990, 1992) desarrollan un procedimiento para contrastar de forma similar y exacta si el coeficiente de la variable dependiente retardada en un modelo autorregresivo de primer orden que puede contener variables exógenas, es igual a la unidad (se le conoce con el nombre de test KPh). Concretamente, el test similar de la hipótesis de raíz unitaria alrededor de una función del tiempo determinista de grado d , se consigue introduciendo en el proceso generador de datos el regresor redundante adicional t^{d+1} . Este regresor hace que la estimación del coeficiente de la variable dependiente retardada y su estadístico t asociado sean invariantes con respecto a los parámetros molestos que intervienen en el proceso generador. Por ejemplo, si en el modelo (3) consideramos a la variable t como un regresor adicional redundante, el test basado en la estimación MCO de (3) es un contraste similar de

¹Ver evidencia teórica en Nankervis y Savin (1985, 1987).

la hipótesis de raíz unitaria alrededor de una posible constante. En realidad, el test KPh es una generalización de los contraste de Dickey-Fuller.

Por otro lado, algunos autores como Fukushige et al. (1990) y Ogaki y Park (1990) señalan que, en muchas aplicaciones (especialmente en el contexto de la cointegración), es más atractiva una hipótesis nula de estacionariedad frente a una alternativa de presencia de raíces unitarias. En este sentido, autores como Kwiatkowski et al. (1992), Khan y Ogaki (1992), Bierens y Guo (1993) y Leybourne y McCabe (1994) han desarrollado diferentes contrastes de hipótesis nula estacionaria frente a la alternativa de raíz unitaria.

Finalmente, entre las últimas aportaciones para contrastar raíces unitarias destacan, por un lado, el trabajo de Ferretti y Romo (1996) en el que proponen contrastar la existencia de raíz unitaria aplicando la técnica bootstrap; el trabajo de Shin y So (1997), quienes desarrollan tests semiparamétricos de raíz unitaria basados en estimadores simétricos; y, por último, el de Hasan y Koenker (1997), que proponen un contraste de raíz unitaria basado en el test de rangos.

En definitiva, el objetivo de todos estos contrastes es establecer una metodología que permita determinar si una serie temporal tiene tendencia estocástica (raíz unitaria) o no, con la mayor potencia posible e intentando diferenciarla de la tendencia determinista. El acierto en dicha decisión es fundamental en la determinación del grado de integración de las series, siendo ésta básica tanto para la especificación y estimación del modelo, como para el análisis de cointegración que tanto auge está tomando últimamente.

En nuestro trabajo nos centramos, principalmente, en el carácter no similar de los tests de raíz unitaria, pues, como expondremos, es una de las principales causas de la baja potencia de estos contrastes. Consideramos, por tanto, del máximo interés realizar un estudio que desarrolle toda esta problemática.

Así, el presente trabajo se ha desarrollado con el objetivo principal de:

- Analizar desde la perspectiva de la no similaridad las distribuciones de los distintos estadísticos que habitualmente se emplean para contrastar la presencia de raíz unitaria.

Planteamos para ello como objetivos secundarios:

- Definir zonas de rechazo y aceptación de las hipótesis nulas para cada estadístico considerando las distintas distribuciones del mismo.
- Estudiar las distintas situaciones con las que nos podemos encontrar con el fin de deducir una pauta de comportamiento que minimice el riesgo de error.

- Estudiar la incidencia de los estadísticos en cada una de las zonas definidas mediante un experimento Monte Carlo.

Así, en la sección 2.1 analizamos las distribuciones de los estadísticos t asociados a los estimadores MCO de los parámetros que intervienen en el modelo con constante y tendencia determinista lineal. En la sección 2.2 se estudia el modelo autorregresivo con constante. En la sección 2.3 se considera un proceso autorregresivo puro de orden 1. En la sección 3, se presenta un ejemplo en el que se pone de manifiesto que la no similaridad de los contrastes tradicionales de raíz unitaria nos puede llevar a tomar una decisión equivocada. Teniendo en cuenta dicha no similaridad, se propone una estrategia de contraste secuencial para resolver situaciones de indecisión acerca del rechazo o no de la existencia de raíz unitaria. Finalmente, se presentan los resultados de un experimento Monte Carlo que recoge la probabilidad de que el valor calculado de cada estadístico caiga en las diferentes zonas establecidas en la sección 2.

2. ANÁLISIS DE LAS DISTRIBUCIONES DE LOS ESTADÍSTICOS t Y DE SUS CONTRASTES ASOCIADOS

En esta sección se analizan las distribuciones de los estadísticos t asociados a los estimadores MCO de los parámetros que intervienen en los modelos (1), (2) y (3). Es decir, se toman los tres procesos generadores de datos que consideraron Dickey y Fuller para desarrollar sus tests de raíz unitaria, asumiendo en cada uno que el término de error es independiente e idénticamente distribuido con media cero y varianza constante, y que la condición inicial Y_0 es constante e igual a cero.

2.1. Planteamiento y estimación del modelo completo

En primer lugar analizamos el proceso más general (3), es decir, aquel en el que aparece, además del término autorregresivo de orden 1, un término constante y una tendencia determinista lineal. Dicho proceso se representa mediante el modelo

$$(5) \quad Y_t = \mu + \beta t + \rho Y_{t-1} + e_t \quad t = 1, 2, \dots, T$$

donde μ es una constante, t la tendencia determinista lineal, y para el que se asume $Y_0 = 0$ y $e_t \sim \text{NID}(0, \sigma^2)$.

De la estimación MCO del modelo (5) se obtienen los siguientes estimadores y estadísticos:

$\hat{\rho}_\tau$: Estimador MCO del parámetro ρ

$\hat{\beta}_\tau$: Estimador MCO del parámetro β

$\hat{\mu}_\tau$: Estimador MCO del parámetro μ

t_{ρ_τ} : Estadístico t asociado a la estimación MCO de ρ

t_{β_τ} : Estadístico t asociado a la estimación MCO de β

t_{μ_τ} : Estadístico t asociado a la estimación MCO de μ

Cuando $\beta = 0$ y $\rho = 1$, al estadístico t_{μ_τ} para $\mu = 0$ se le suele dar la notación específica $\hat{\tau}_{\alpha\tau}$. Asimismo, cuando $\mu = 0$ y $\rho = 1$, al estadístico t_{β_τ} para $\beta = 0$ se le denota $\hat{\tau}_{\beta\tau}$. Finalmente, cuando $\beta = 0$, siendo μ cualquier valor real, al estadístico t_{ρ_τ} para $\rho = 1$ se le denota $\hat{\tau}_\tau$.

A) CONTRASTE SOBRE ρ

A.1) Distribución de t_{ρ_τ}

En principio, se puede utilizar el estadístico t_{ρ_τ} para llevar a cabo el contraste unilateral de presencia de raíz unitaria

$$\begin{aligned}H_0 &: \rho = 1 \\H_1 &: \rho < 1\end{aligned}$$

Dickey y Fuller (1979) obtuvieron la representación de la distribución límite de $\hat{\tau}_\tau$ bajo $Y_0 = 0$ y $e_t \sim \text{NID}(0, \sigma^2)$, es decir, la distribución límite de t_{ρ_τ} para $\rho = 1$ asumiendo que el coeficiente β de la variable t es cero. Esta distribución es independiente del valor de μ (ver Dickey (1976)), y se mantiene en el caso de que $e_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$. En cualquier caso, se trata de una distribución no conocida, y Dickey (1976) utilizó métodos Monte Carlo para estimar los cuantiles de la distribución de $\hat{\tau}_\tau$, tanto para tamaños de muestra finitos como para la distribución límite. Algunos de estos cuantiles empíricos aparecen tabulados para $T = 25, 50, 100, 250$ y 500 en Fuller (1996, p. 642)².

Por otro lado, Dickey y Fuller (1979) demuestran que si $\beta \neq 0$ la distribución límite de t_{ρ_τ} para $\rho = 1$ es normal estándar.

La influencia de β en la distribución de t_{ρ_τ} para $\rho = 1$ y tamaños de muestra finitos, fue estudiada por Nankervis y Savin (1987). Estos autores, asumiendo $Y_0 = 0$ sin pérdida de generalidad, y $e_t \sim \text{N}(0, 1)$, prueban que, para cada T fijo, la distribución de t_{ρ_τ} (para $\rho = 1$) converge a una t de Student con $T - 3$ grados de libertad cuando $|\beta| \rightarrow \infty$ (Nankervis y Savin, 1987, p. 396).

²Guilkey y Schmidt (1989) proporcionan más cuantiles para más tamaños de muestra.

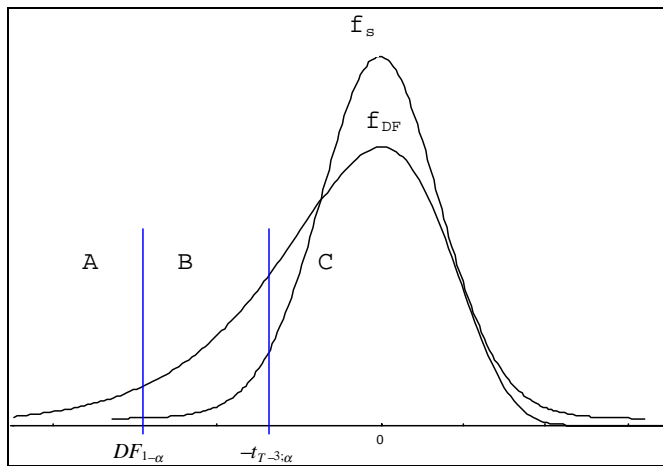


Figura 1. Densidad de t_{ρ_T} bajo $\rho = 1$, según el valor de β
Fuente: Elaboración propia.

La distribución empírica de $\hat{\tau}_T$ que obtuvieron Dickey y Fuller presenta asimetría positiva. Además, para cada T y un mismo nivel de significación, los valores críticos son menores que los correspondientes a una t de Student con $T - 3$ grados de libertad. Por tanto, el resultado de Nankervis y Savin (1987) implica que, a medida que aumenta el valor de β , la distribución de $\hat{\tau}_T$ se va desplazando a la derecha y haciéndose simétrica, hasta convertirse en una t_{T-3} .

Obviamente, en la práctica β no será infinito, por lo que la t_{T-3} es una aproximación a la distribución de t_{ρ_T} para $\rho = 1$, $\beta \neq 0$ y T finito que, según un estudio Monte Carlo de Nankervis y Savin (1987), es buena para valores de β pequeños³.

A.2) Contraste de la hipótesis $\rho = 1$

Según lo anterior, el contraste basado en el estadístico t_{ρ_T} constituye un test no similar, ya que su distribución bajo la hipótesis nula de existencia de raíz unitaria depende del valor que tome el parámetro β , siendo independiente del valor que tome μ . Por tanto, para llevar a cabo en (5) el contraste unilateral planteado anteriormente, hay que tener en cuenta las dos distribuciones extremas del estadístico t_{ρ_T} , pudiéndose establecer, como veremos seguidamente, zonas de aceptación, duda y rechazo según el nivel de

³Las aproximaciones son satisfactorias para $\rho = 1$ y $T = 100$ cuando $\beta \geq 0.1$.

significación α fijado. En la figura 1, f_{DF} representa la densidad empírica de $\hat{\tau}_\tau$ (siendo $\rho = 1$ y $\beta = 0$) para el valor de T considerado, mientras que f_S es la densidad de la t_{T-3} , también bajo $\rho = 1$, tomada como aproximación al caso en el que $\beta \neq 0$.

El valor $DF_{1-\alpha}$ representa el cuantil de orden $1 - \alpha$ de la distribución empírica de $\hat{\tau}_\tau$. Así, el intervalo $(DF_{1-\alpha}; +\infty)$ constituye la región de aceptación del contraste unilateral

$$H_0 : \rho = 1 \quad (\text{asumiendo } \beta = 0)$$

$$H_1 : \rho < 1$$

basado en $\hat{\tau}_\tau$.

Por otro lado, el valor $t_{T-3;\alpha}$ denota el cuantil de orden α de la t de Student con $T - 3$ grados de libertad. Por tanto, el intervalo $(-t_{T-3;\alpha}; +\infty)$ determinaría la región de aceptación del contraste unilateral

$$H_0 : \rho = 1 \quad (\text{asumiendo } \beta \neq 0)$$

$$H_1 : \rho < 1$$

que realizaríamos en el caso de que se conociera que $\beta \neq 0$.

En la práctica, lo habitual es que no se conozca el valor del parámetro β , por lo que desarrollamos el contraste considerando las dos distribuciones simultáneamente. Así, la región de aceptación de tamaño α del contraste unilateral sería $(-t_{T-3;\alpha}; +\infty)$, que corresponde a la **zona C** de la figura 1. De esta forma, si el valor calculado del estadístico t_{ρ_τ} (\hat{t}_{ρ_τ} en lo sucesivo) cae en la zona C no se rechaza la hipótesis nula ($\rho = 1$). Además, al ser la zona C la intersección de las regiones de aceptación $(DF_{1-\alpha/2}; +\infty)$ y $(-t_{T-3;\alpha}; +\infty)$, el valor \hat{t}_{ρ_τ} llevaría a aceptar la hipótesis nula del contraste basado solamente en $\hat{\tau}_\tau$, así como la del contraste basado únicamente en la t_{T-3} . Por tanto, cuando \hat{t}_{ρ_τ} caiga en la zona C, se puede concluir que $\rho = 1$, pudiendo β , y por supuesto μ , tomar cualquier valor.

Cuando el valor calculado del estadístico t_{ρ_τ} cae en la **zona A**, constituida por el intervalo $(-\infty; DF_{1-\alpha})$, en principio, la conclusión debe ser que $\rho < 1$. No obstante, no debemos caer en la tentación de añadir a la decisión sobre ρ que $\mu = 0$ por el hecho de haber aplicado el contraste basado en una distribución (la de $\hat{\tau}_\tau$) obtenida bajo el supuesto de $\mu = 0$. Si tenemos en cuenta que $DF_{1-\alpha} < -t_{T-3;\alpha}$, entonces, si se ha rechazado la hipótesis nula ($\rho = 1$) para la distribución empírica de $\hat{\tau}_\tau$ seguro que también se rechaza para la t_{T-3} . Esto significa que cuando \hat{t}_{ρ_τ} cae en la zona A, cabe esperar que se deba bien a que $\rho < 1$ y $\beta = 0$, o a que $\rho < 1$ y $\beta \neq 0$. Por tanto, para un valor de \hat{t}_{ρ_τ} en la zona A, la conclusión debe ser que $\rho < 1$, pudiendo β tomar cualquier valor⁴.

⁴Esta es la razón por la que en el planteamiento de las hipótesis del contraste basado en t_{ρ_τ} no se dice nada acerca de β en las alternativas, pues, bajo estas hipótesis, el parámetro β puede tomar cualquier valor.

En el caso de que \hat{t}_{ρ_τ} caiga en el intervalo $(DF_{1-\alpha}; -t_{T-3;\alpha})$ o **zona B** de la figura, se pueden plantear dos situaciones diferentes:

- a) El valor calculado de t_{ρ_τ} pertenece al intervalo $(DF_{1-\alpha}; +\infty)$, por lo que no se rechaza la hipótesis nula del contraste basado en $\hat{\tau}_\tau$. De esta forma, la conclusión debe ser $\rho = 1$ asumiendo que $\beta = 0$.
- b) El valor \hat{t}_{ρ_τ} comparado con el valor crítico $-t_{T-3;\alpha}$ de la t_{T-3} , es tal que $\hat{t}_{\rho_\tau} < -t_{T-3;\alpha}$, rechazándose la hipótesis nula del contraste basado en la t_{T-3} . Por tanto, lo más probable es que $\rho < 1$, siendo $\beta \neq 0$, de donde se excluye el caso $\rho < 1$ y $\beta = 0$, correspondiente al error de tipo II del contraste basado en $\hat{\tau}_\tau$.

Por tanto, si el valor \hat{t}_{ρ_τ} está en la zona B lo más probable es que sea porque o bien $\rho = 1$ y $\beta = 0$, o bien $\rho < 1$ y $\beta \neq 0$. Se observa, pues, que el utilizar unos valores críticos u otros para el contraste de raíz unitaria en (5) nos lleva a tomar decisiones diferentes sobre ρ , lo que supone la posibilidad de cometer un error adicional al inherente a todo problema inferencial. Por todo esto llamaremos a la zona B, zona de duda.

En este caso, la duda podría despejarse si, de alguna forma, se pudiese determinar si $\beta = 0$ o $\beta \neq 0$. Por ello, en la sección siguiente analizamos las características de la distribución del estadístico t asociado a la estimación MCO de β en (5).

Los valores críticos de t_{ρ_τ} que permiten la definición de las zonas de aceptación, rechazo y duda descritas para este estadístico se presentan en la tabla A del anexo, para distintos tamaños muestrales. Por otro lado, la tabla 1 resume las consecuencias que se derivan según la zona en la que caiga el valor calculado de t_{ρ_τ} .

Tabla 1. Consecuencia según la zona en la que cae el valor \hat{t}_{ρ_τ}

Zona	Extremos	Consecuencia
A	$(-\infty; DF_{1-\alpha})$	$\rho < 1, \beta$ cualquiera
B	$(DF_{1-\alpha}; -t_{T-3;\alpha})$	$\rho = 1$ y $\beta = 0$ ó $\rho < 1$ y $\beta \neq 0$
C	$(-t_{T-3;\alpha}; +\infty)$	$\rho = 1, \beta$ cualquiera

Fuente: Elaboración propia.

B) CONTRASTE SOBRE β

B.1) Distribución de $t_{\beta\tau}$

El estadístico t asociado a la estimación MCO de β en (5), que hemos denotado $t_{\beta\tau}$, puede utilizarse para contrastar la significación de β , es decir, para el contraste bilateral

$$H_0 : \beta = 0$$

$$H_1 : \beta \neq 0$$

La distribución de este estadístico bajo H_0 , depende del valor de ρ y de μ . Así, cuando $\rho = 1$ y $\mu = 0$, la distribución límite de $t_{\beta\tau}$ para $\beta = 0$, o lo que es igual, la distribución límite de $\hat{\tau}_{\beta\tau}$, fue caracterizada por Dickey y Fuller (1981). Se trata de una distribución no conocida, y estos mismos autores proporcionan algunos valores críticos, obtenidos por simulación, para el contraste de significación de β , tanto para tamaños de muestra finitos como para la distribución límite (Dickey y Fuller 1981, Tabla III, p. 1062).

Hasza (1977) ha desarrollado la teoría asintótica para el caso en el que las variables exógenas en un modelo autorregresivo son polinomios de tiempo. Según esta teoría, la distribución límite de $t_{\beta\tau}$ para cualquier β (a nosotros nos interesa $\beta = 0$) cuando $|\rho| \neq 1$, es una normal estándar, con independencia del valor que tome μ . Por tanto, para tamaños de muestra finitos se puede emplear como aproximación la t de Student con $T - 3$ grados de libertad.

Finalmente, si $\beta = 0$ y $\rho = 1$, el teorema 3 de Nankervis y Savin (1987, p. 398) establece que cuando $|\mu| \rightarrow \infty$, la distribución de $t_{\beta\tau}$ para cada T fijo, tiende a la imagen en el espejo de la distribución de $\hat{\tau}_{\tau}$ para ese valor de T . Esto significa que los valores críticos que se deben utilizar son los que Dickey (1976) tabuló para $\hat{\tau}_{\tau}$, pero cambiados de signo. Por ello, denotamos $-\hat{\tau}_{\tau}$ a la imagen en el espejo de $\hat{\tau}_{\tau}$, cuya distribución empírica utilizaremos como aproximación a la distribución de $t_{\beta\tau}$ para $\beta = 0$, $\rho = 1$ y $\mu \neq 0$. En un estudio Monte Carlo realizado por Nankervis y Savin (1987, p. 504- 506), se tiene que la aproximación es buena para valores de μ no muy grandes (por ejemplo, para $T = 25$, la aproximación es buena para $\mu \geq 1$).

B.2) Contraste de la hipótesis $\beta = 0$

Al igual que ocurría con el estadístico t asociado a la estimación MCO de ρ , el que la distribución de $t_{\beta\tau}$ para $\beta = 0$ dependa del valor de los parámetros μ y ρ , significa que el contraste basado en dicho estadístico es un test no similar de la hipótesis $H_0 : \beta = 0$ en (5). Por tanto, consideraremos las tres distribuciones descritas para realizar el contraste bilateral sobre β planteado más arriba.

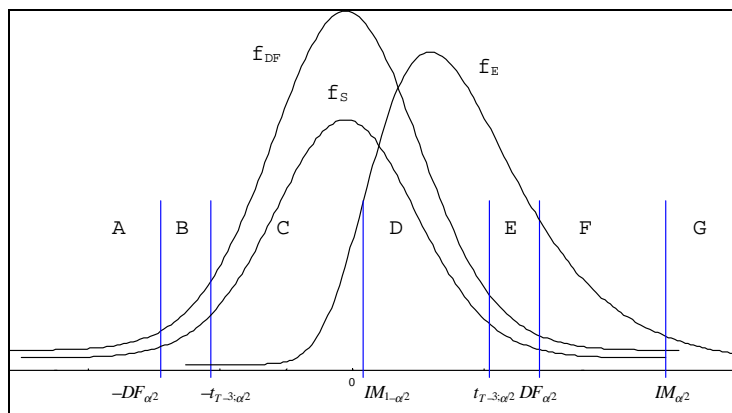


Figura 2. Densidad de t_{β_T} bajo $\beta = 0$, según los valores de ρ y μ
Fuente: Elaboración propia.

La figura 2 muestra la densidad del estadístico t_{β_T} bajo la hipótesis nula ($\beta = 0$) y un tamaño muestral fijo, según los valores de ρ y μ . Así, f_{DF} representa la densidad empírica⁵ de $\hat{\tau}_{\beta_T}$ para el valor de T considerado; f_S es la densidad de la t_{T-3} ; y f_E es la densidad de la imagen en el espejo de $\hat{\tau}_{\beta_T}$, también para ese mismo valor de T .

Asimismo, se puede observar la simetría con respecto al origen de la distribución empírica de $\hat{\tau}_{\beta_T}$, siendo $DF_{\alpha/2}$ el cuantil de orden $\alpha/2$. De esta forma, el intervalo $(-DF_{\alpha/2}; DF_{\alpha/2})$ constituye la región de aceptación del contraste

$$H_0 : \beta = 0 \quad (\text{asumiendo } \rho = 1 \text{ y } \mu = 0)$$

$$H_1 : \beta \neq 0$$

En cambio, si se utilizan los valores críticos de la t de Student con $T - 3$ grados de libertad, se obtiene la región de aceptación $(-t_{T-3, \alpha/2}; t_{T-3, \alpha/2})$ correspondiente al contraste

$$H_0 : \beta = 0 \quad (\text{asumiendo } |\rho| \neq 1)$$

$$H_1 : \beta \neq 0$$

Finalmente, los valores $IM_{1-\alpha/2}$ y $IM_{\alpha/2}$, representan los cuantiles de órdenes $1 - \alpha/2$ y $\alpha/2$, respectivamente, de la distribución empírica de $-\hat{\tau}_{\beta_T}$. Así, el intervalo

⁵Aunque en la figura 2 no aparece reflejado, en realidad, f_{DF} es una distribución bimodal (ver Dickey y Fuller (1981), p. 1065). No obstante, este hecho no afecta al desarrollo que se realiza.

$(IM_{1-\alpha/2}; IM_{\alpha/2})$ constituye la región de aceptación del contraste

$$H_0 : \beta = 0 \quad (\text{asumiendo } \rho = 1 \text{ y } \mu \neq 0)$$

$$H_1 : \beta \neq 0$$

Puesto que lo habitual es no conocer nada acerca de ρ y μ , la utilización simultánea de las tres distribuciones mencionadas, cuyos valores críticos determinan una serie de zonas que quedan reflejadas en la figura 2, permite sacar algunas conclusiones sobre los parámetros μ , β y ρ , dependiendo de la zona en la que caiga el valor calculado del estadístico $t_{\beta\tau}$ ($\hat{t}_{\beta\tau}$ en lo sucesivo).

Así, el intervalo $(IM_{\alpha/2}; t_{T-3; \alpha/2})$, **zona D** en la figura 2, es la región de aceptación de tamaño α del contraste bilateral sobre β , ya que es la intersección de las regiones de aceptación $(-DF_{\alpha/2}; DF_{\alpha/2})$, $(-t_{T-3; \alpha/2}; t_{T-3; \alpha/2})$ e $(IM_{1-\alpha/2}; IM_{\alpha/2})$ de los contrastes basados en $\hat{\tau}_{\beta\tau}$, t_{T-3} y $-\hat{\tau}_{\beta\tau}$, respectivamente. Esto significa que un valor de $\hat{t}_{\beta\tau}$ en la zona D no permite rechazar las hipótesis nulas de los contrastes anteriores, y se concluye que $\beta = 0$, pudiendo ρ y μ tomar cualquier valor.

Los intervalos $(-\infty; -DF_{\alpha/2})$ e $(IM_{\alpha/2}; +\infty)$, **zonas A y G** respectivamente, constituyen la región de rechazo del contraste basado en las tres distribuciones, ya que en estas zonas el valor calculado de $t_{\beta\tau}$ no pertenece a las regiones de aceptación de los contrastes basados en $\hat{\tau}_{\beta\tau}$, t_{T-3} y $-\hat{\tau}_{\beta\tau}$. En este caso la conclusión debe ser que $\beta \neq 0$, pudiendo ρ y μ tomar cualquier valor.

Si el valor $\hat{t}_{\beta\tau}$ cae en la **zona B**, es decir, en el intervalo $(-DF_{\alpha/2}; -t_{T-3; \alpha/2})$, se pueden hacer las siguientes consideraciones:

- a) El valor calculado $\hat{t}_{\beta\tau}$ pertenece al intervalo $(-DF_{\alpha/2}; DF_{\alpha/2})$, y, por tanto, no se rechaza la hipótesis nula del contraste basado en $\hat{\tau}_{\beta\tau}$. De esta forma, la conclusión sería que $\beta = 0$, asumiendo que $\rho = 1$ y $\mu = 0$.
- b) En cambio, al ser $\hat{t}_{\beta\tau} < -t_{T-3; \alpha/2}$, se rechazarían las hipótesis nulas de los contrastes basados en la t_{T-3} y en $-\hat{\tau}_{\beta\tau}$. Por tanto, se concluye que $\beta \neq 0$, pudiendo ρ y μ tomar cualquier valor, si bien debe excluirse el caso $\beta \neq 0$, $\rho = 1$ y $\mu = 0$ achacable al error de tipo II del contraste basado en $\hat{\tau}_{\beta\tau}$.

Por tanto, si el valor $\hat{t}_{\beta\tau}$ está en la zona B lo más probable es que sea porque o bien $\beta = 0$, $\rho = 1$ y $\mu = 0$, o bien $\beta \neq 0$ y ρ y μ cualesquiera (excluyendo el caso en el que de forma simultánea $\rho = 1$ y $\mu = 0$).

En el caso de que $\hat{t}_{\beta\tau}$ caiga en el intervalo $(-t_{T-3; \alpha/2}; IM_{1-\alpha/2})$ o **zona C** de la figura, se plantean las siguientes situaciones:

- a) El valor calculado de t_{β_τ} está dentro de las regiones de aceptación de los contrastes basados en $\hat{\tau}_{\beta_\tau}$ y en la t de Student, lo que no nos permite rechazar la hipótesis de nula de cada uno de estos contrastes. Concretamente, para el contraste basado en $\hat{\tau}_{\beta_\tau}$, la conclusión sería $\beta = 0$, asumiendo $\rho = 1$ y $\mu = 0$; mientras que para el contraste basado en la t_{T-3} , la decisión sería $\beta = 0$, asumiendo que $|\rho| \neq 1$ y pudiendo μ tomar cualquier valor. Nótese que el único caso que queda fuera es $\beta = 0$, $\rho = 1$ y $\mu \neq 0$, correspondiente a la aceptación de la hipótesis nula del contraste basado en $-\hat{\tau}_\tau$, circunstancia que, como veremos a continuación, no se produce en esta zona.
- b) Como $\hat{t}_{\beta_\tau} < IM_{1-\alpha/2}$, se rechaza la hipótesis nula correspondiente al contraste basado en $-\hat{\tau}_\tau$, lo que significa que $\beta \neq 0$. Además, al estar en la zona C, es de esperar que $\rho = 1$ y $\mu \neq 0$, pues, los demás casos son atribuibles al error de tipo II del contraste basado en $\hat{\tau}_{\beta_\tau}$ o en la t_{T-3} .

Por tanto, si el valor \hat{t}_{β_τ} cae en la zona C lo más probable es que sea porque es $\beta = 0$ con ρ y μ cualesquiera (excluyendo el caso en el que de forma simultánea $\rho = 1$ y $\mu \neq 0$) o porque $\beta \neq 0$, $\rho = 1$ y $\mu \neq 0$.

Por otro lado, cuando \hat{t}_{β_τ} se encuentra en el intervalo $(t_{T-3;\alpha/2}; DF_{\alpha/2})$ o **zona E**, se producen las siguientes circunstancias:

- a) Se aceptan las hipótesis nulas de los contrastes basados en $\hat{\tau}_{\beta_\tau}$ y $-\hat{\tau}_\tau$, pues, el valor observado de t_{β_τ} cae dentro de las respectivas regiones de aceptación. De esta forma, en relación al primer contraste, la conclusión es $\beta = 0$, asumiendo $\rho = 1$ y $\mu = 0$; mientras que la conclusión respecto al segundo es $\beta = 0$, asumiendo $\rho = 1$ y $\mu \neq 0$. Esto permite concluir que $\beta = 0$, asumiendo $\rho = 1$ y pudiendo μ tomar cualquier valor.
- b) El hecho de que $\hat{t}_{\beta_\tau} > t_{T-3;\alpha/2}$ implica el rechazo de la hipótesis nula del contraste basado en la t_{T-3} . Por tanto, la conclusión sería $\beta \neq 0$, y al estar en la zona E lo más probable es que $|\rho| \neq 1$ con independencia del valor de μ , pues, los casos en los que $\beta \neq 0$ y $\rho = 1$ forman parte del error de tipo II del contraste basado en $\hat{\tau}_{\beta_\tau}$ o en $-\hat{\tau}_\tau$.

Así pues, cuando \hat{t}_{β_τ} cae en la zona E lo más probable es que sea porque $\beta = 0$ y $\rho = 1$, o porque $\beta \neq 0$ y $|\rho| \neq 1$, pudiendo μ , en ambos casos, tomar cualquier valor.

Finalmente, si el valor calculado de t_{β_τ} cae en la **zona F** o intervalo $(DF_{\alpha/2}; IM_{\alpha/2})$ podemos hacer las siguientes consideraciones:

- a) El valor \hat{t}_{β_τ} cae dentro de la región de aceptación del contraste basado en $-\hat{\tau}_\tau$. Esto significa que se acepta que $\beta = 0$, asumiendo $\rho = 1$ y $\mu \neq 0$.
- b) En cambio, el que $\hat{t}_{\beta_\tau} > DF_{\alpha/2}$ indica que se rechazan las hipótesis nulas de los contrastes basados en $\hat{\tau}_{\beta_\tau}$ y en la t_{T-3} . Esto nos lleva a concluir que $\beta \neq 0$, pudiendo

ρ y μ tomar cualquier valor, debiendo excluir el caso $\beta \neq 0, \rho = 1$ y $\mu \neq 0$ por formar parte del error de tipo II del contraste basado en $-\hat{\tau}_\tau$.

Por tanto, si el valor \hat{t}_{β_τ} cae en la zona F lo más probable es que sea porque o bien $\beta = 0, \rho = 1$ y $\mu \neq 0$, o bien porque $\beta \neq 0$ con ρ y μ cualesquiera (excluyendo el caso en el que de forma simultánea $\rho = 1$ y $\mu \neq 0$).

Como se ha podido comprobar en las **zonas B, C, E y F** se llega a conclusiones diferentes acerca del parámetro β según se utilicen unos valores críticos u otros. Por ello, a estas zonas las llamamos zonas de duda, la cual se resolvería si tuviésemos información acerca de ρ y μ .

Los valores críticos de t_{β_τ} que determinan las zonas de aceptación, rechazo y duda descritas para este estadístico se presentan en la tabla B del anexo para distintos tamaños muestrales. Asimismo, en la tabla 2 se recogen las consecuencias a las que se llegan según la zona en la que se encuentre el valor calculado de t_{β_τ} .

Tabla 2. Consecuencia según la zona en la que cae el valor \hat{t}_{β_τ}

Zona	Extremos	Consecuencia
A	$(-\infty; -DF_{\alpha/2})$	$\beta \neq 0, \rho$ y μ cualesquiera
B	$(-DF_{\alpha/2}; -t_{T-3; \alpha/2})$	$\beta = 0, \rho = 1, \mu = 0$ ó $\beta \neq 0, \rho$ y μ cualesquiera*
C	$(-t_{T-3; \alpha/2}; IM_{1-\alpha/2})$	$\beta = 0, \rho$ y μ cualesquiera** ó $\beta \neq 0, \rho = 1, \mu \neq 0$
D	$(IM_{\alpha/2}; t_{T-3; \alpha/2})$	$\beta = 0, \rho$ y μ cualesquiera
E	$(t_{T-3; \alpha/2}; DF_{\alpha/2})$	$\beta = 0, \rho = 1, \mu$ cualquiera
F	$(DF_{\alpha/2}; IM_{\alpha/2})$	$\beta = 0, \rho = 1, \mu \neq 0$ ó $\beta \neq 0, \rho$ y μ cualesquiera***
G	$(IM_{\alpha/2}; +\infty)$	$\beta \neq 0, \rho \neq 1, \mu$ cualquiera

* Se excluye el caso en el que de forma simultánea $\beta \neq 0, \rho = 1, \mu = 0$.

** Se excluye el caso en el que de forma simultánea $\beta = 0, \rho = 1, \mu \neq 0$.

*** Se excluye el caso en el que de forma simultánea $\beta \neq 0, \rho = 1, \mu \neq 0$.

Fuente: Elaboración propia.

C) DISTRIBUCIÓN DEL ESTADÍSTICO $t_{\mu\tau}$ Y CONTRASTE ASOCIADO

El estadístico t de la estimación MCO de μ en (5), que hemos denotado $t_{\mu\tau}$, puede utilizarse para contrastar la significación de μ , siendo las hipótesis del contraste

$$H_0 : \mu = 0$$

$$H_1 : \mu \neq 0$$

El contraste basado en este estadístico es un test no similar, pues, su distribución bajo H_0 depende del valor de ρ y β . Dickey y Fuller (1981) obtuvieron la representación de la distribución límite del estadístico $t_{\mu\tau}$ para $\mu = 0$ cuando $\rho = 1$ y $\beta = 0$, el cual hemos denotado $\hat{\tau}_{\alpha\tau}$. Como en casos anteriores, se trata de una distribución no conocida, y estos autores proporcionan, mediante simulación, algunos valores críticos para el contraste de significación de μ , tanto para tamaños de muestra finitos como para la distribución límite (Dickey y Fuller 1981, Tabla II, p. 1062). Se trata de una distribución bimodal y simétrica con los cuantiles para el contraste al 5% más allá del valor 2.

Según la teoría asintótica desarrollada por Hasza (1977), la distribución límite de $t_{\mu\tau}$ para $\mu = 0$ cuando $|\rho| \neq 1$ es una normal estándar.

D) DISTRIBUCIONES DE LOS ESTADÍSTICOS Φ_2 Y Φ_3 Y CONTRASTES ASOCIADOS

Se analizan a continuación las distribuciones de los estadísticos Φ_2 y Φ_3 que corresponden a contrastes globales sobre el modelo (5):

Φ_2 : Estadístico F para contrastar la hipótesis conjunta: $H_0 : \rho = 1, \beta = 0, \mu = 0$.

Φ_3 : Estadístico F para contrastar la hipótesis conjunta: $H_0 : \rho = 1, \beta = 0$.

Dickey y Fuller (1981) caracterizaron las distribuciones límite de Φ_2 y Φ_3 , no estando la segunda afectada por el valor de μ . Las distribuciones de estos estadísticos no son la F de Snedecor conocida y Dickey y Fuller (1981) obtuvieron empíricamente algunos valores críticos para tamaños de muestra finitos y para la distribución límite (Dickey y Fuller, 1981, Tablas V y VI, p. 1063).

Si no se rechaza la hipótesis nula del contraste basado en Φ_2 , la conclusión final es que $\rho = 1, \beta = 0$ y $\mu = 0$, mientras que rechazar H_0 nos lleva a no poder decidir nada, pues el rechazo puede deberse a que $\rho \neq 1, \beta \neq 0$ y/o $\mu \neq 0$.

De forma análoga, si no podemos rechazar la hipótesis nula del contraste basado en Φ_3 la conclusión final es que $\rho = 1$ y $\beta = 0$, con independencia del valor de μ ; mientras

que rechazar H_0 no nos permite tomar una decisión concreta, pues el rechazo puede deberse a que $\rho \neq 1$ y/o $\beta \neq 0$.

2.2. Planteamiento y estimación del modelo solo con término constante

En caso de que se conozca que el modelo no lleva tendencia determinista lineal, podemos analizar la existencia de raíz unitaria partiendo de la estimación MCO del modelo (2), cuya representación es

$$(6) \quad Y_t = \mu + \rho Y_{t-1} + e_t \quad t = 1, 2, \dots, T$$

donde μ y ρ son parámetros desconocidos, y para el que se asume $Y_0 = 0$ y $e_t \sim NI(0, 1)$. De dicha estimación obtenemos los siguientes estimadores y estadísticos:

$\hat{\rho}_\mu$: Estimador MCO del parámetro ρ .

$\hat{\mu}$: Estimador MCO del parámetro μ .

t_{ρ_μ} : Estadístico t asociado a la estimación MCO de ρ .

t_μ : Estadístico t asociado a la estimación MCO de μ .

Cuando $\mu = 0$ al estadístico t_{ρ_μ} para $\rho = 1$ se le suele dar la notación específica $\hat{\tau}_\mu$. Asimismo, cuando $\rho = 1$, al estadístico t_μ para $\mu = 0$ se le denota $\hat{\tau}_{\alpha\mu}$.

A) CONTRASTE SOBRE ρ

A.1) Distribución de t_{ρ_μ}

En principio, para llevar a cabo el contraste unilateral de presencia de raíz unitaria

$$\begin{aligned} H_0 : \rho &= 1 \\ H_1 : \rho &< 1 \end{aligned}$$

se puede utilizar el estadístico t_{ρ_μ} . En este caso la distribución de t_{ρ_μ} bajo la hipótesis nula depende del valor del parámetro μ , por lo que el contraste basado en este estadístico es un test no similar de la hipótesis de paseo aleatorio.

Concretamente, para $\mu = 0$, Dickey y Fuller (1979) caracterizaron la distribución límite

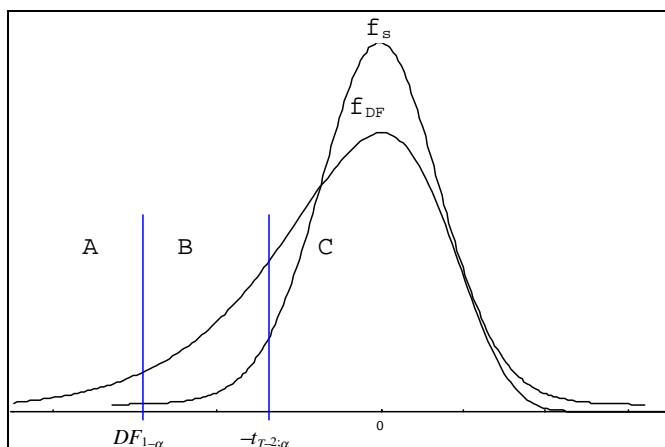


Figura 3. Densidad de $t_{\rho\mu}$ bajo $\rho = 1$, según el valor de μ

Fuente: Elaboración propia.

de $t_{\rho\mu}$ para $\rho = 1$, es decir, la distribución límite del estadístico $\hat{\tau}_\mu$, bajo los supuestos⁶ $Y_0 = 0$ y $e_t \sim \text{NID}(0, \sigma^2)$. Se trata de una distribución no conocida, y Dickey (1976) obtuvo de forma empírica (por simulación) los valores críticos para el contraste de raíz unitaria, tanto para tamaños de muestra finitos como para la distribución límite (Fuller, 1996, p. 642).

Por otro lado, cuando $\mu \neq 0$ Dickey (1976, p. 58) demuestra que, cuando T tiende a infinito, la distribución de $t_{\rho\mu}$ para $\rho = 1$ es $N(0,1)$. Esto hace pensar que en el caso de un tamaño de muestra finito dicha distribución se puede aproximar mediante la t de Student. En efecto, Nankervis y Savin (1985) prueban que cuando $\mu \rightarrow \infty$, la distribución de $t_{\rho\mu}$ para $\rho = 1$ y un tamaño de muestra T fijo, tiende a una t de Student con $T - 2$ grados de libertad, todo ello asumiendo en (6) que $Y_0 = 0$ y que los errores son normales con media cero y varianza 1.

La distribución de $\hat{\tau}_\mu$ que obtuvieron empíricamente Dickey y Fuller, tiene asimetría positiva. Además, para cada valor de T y un mismo nivel de significación, los valores críticos son menores que los correspondientes a una t de Student con $T - 2$ grados de libertad. Por tanto, el resultado de Nankervis y Savin (1985) implica que, a medida que aumenta el valor de μ , la distribución de $\hat{\tau}_\mu$ se va desplazando a la derecha y haciéndose simétrica, acercándose a la t_{T-2} .

⁶Según Dickey y Fuller (1979, p. 430), la distribución límite de $\hat{\tau}_\mu$ no depende de Y_0 y se mantiene para $e_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$.

Como en la práctica μ no será infinito, la t_{T-2} es una aproximación a la distribución de $t_{\rho\mu}$ para $\rho = 1$, $\mu \neq 0$ y T finito que, según un estudio Monte Carlo de Nankervis y Savin (1985), es muy buena para $\mu \geq 10$.

A.2) Contraste de la hipótesis $\rho = 1$

Todo lo anterior nos lleva a utilizar de forma simultánea las dos distribuciones extremas mencionadas para llevar a cabo en (6) el contraste unilateral de raíz unitaria anteriormente planteado. Así, en la figura 3, f_{DF} representa la densidad empírica de $\hat{\tau}_\mu$ (siendo $\rho = 1$ y $\mu = 0$) para el valor de T considerado, mientras que f_S es la densidad de la t_{T-2} , también bajo $\rho = 1$, tomada como aproximación al caso en el que $\mu \neq 0$.

El valor $DF_{1-\alpha}$ representa el cuantil de orden $1 - \alpha$ de la distribución empírica de $\hat{\tau}_\mu$. De esta forma, el intervalo $(DF_{1-\alpha}; +\infty)$ constituye la región de aceptación del contraste unilateral

$$\begin{aligned} H_0 : \rho &= 1 && \text{(asumiendo } \mu = 0) \\ H_1 : \rho &< 1 \end{aligned}$$

Por otro lado, el valor $t_{T-2;\alpha}$ denota el cuantil de orden α de la t de Student con $T - 2$ grados de libertad. Así, el intervalo $(-t_{T-2;\alpha}; +\infty)$ determinaría la región de aceptación del contraste unilateral

$$\begin{aligned} H_0 : \rho &= 1 && \text{(asumiendo } \mu \neq 0) \\ H_1 : \rho &< 1 \end{aligned}$$

que realizaríamos en el caso de que se conociera que $\mu \neq 0$.

Como lo habitual es no conocer nada sobre el valor del parámetro μ , desarrollamos el contraste considerando las dos distribuciones simultáneamente, de forma que la región de aceptación de tamaño α del contraste unilateral sería $(-t_{T-2;\alpha}; +\infty)$, **zona C** de la figura. Así, si el valor estimado del estadístico $t_{\rho\mu}$ ($\hat{t}_{\rho\mu}$ en lo sucesivo) cae en la zona C no se rechaza la hipótesis nula ($\rho = 1$). Además, como la zona C es la intersección de las regiones de aceptación $(DF_{1-\alpha}; +\infty)$ y $(-t_{T-2;\alpha}; +\infty)$, el valor $\hat{t}_{\rho\mu}$ llevaría a aceptar tanto la hipótesis nula del contraste basado únicamente en $\hat{\tau}_\mu$, como la del contraste basado solamente en la t_{T-2} . Por tanto, cuando $\hat{t}_{\rho\mu}$ esté en la zona C diremos que $\rho = 1$, pudiendo μ tomar cualquier valor.

Los demás valores críticos determinan otras zonas que, en la figura 3, hemos llamado A y B.

La **zona A** está determinada por el intervalo $(-\infty; DF_{1-\alpha})$. Si el valor calculado del estadístico $t_{\rho\mu}$ cae en esta zona A se rechaza la hipótesis nula, y, en principio, se concluye que $\rho < 1$. No obstante, si tenemos en cuenta que $DF_{1-\alpha} < -t_{T-2;\alpha}$, entonces, si se

Tabla 3. Consecuencia según la zona en la que cae el valor $\hat{t}_{\rho\mu}$

Zona	Extremos	Consecuencia
A	$(-\infty; DF_{1-\alpha})$	$\rho < 1, \mu$ cualquiera
B	$(DF_{1-\alpha}; -t_{T-2; \alpha})$	$\rho = 1$ y $\mu = 0$ ó $\rho < 1$ y $\mu \neq 0$
C	$(-t_{T-2; \alpha}; +\infty)$	$\rho = 1, \mu$ cualquiera

Fuente: Elaboración propia.

ha rechazado la hipótesis nula ($\rho = 1$) para la distribución empírica de $\hat{\tau}_{\mu}$, seguro que también se rechaza para la t_{T-2} . Esto nos lleva a pensar que el valor $\hat{t}_{\rho\mu}$ puede caer en la zona A, bien por ser $\rho < 1$ y $\mu = 0$, o bien por ser $\rho < 1$ y $\mu \neq 0$. Por tanto, cuando $\hat{t}_{\rho\mu}$ esté en la zona A la conclusión debe ser que $\rho < 1$, pudiendo μ tomar cualquier valor.

Cuando el valor calculado del estadístico $t_{\rho\mu}$ cae en el intervalo $(DF_{1-\alpha}; -t_{T-2; \alpha})$, **zona B** en la figura 2, podemos encontrarnos en dos situaciones diferentes:

- El valor calculado de $t_{\rho\mu}$ está dentro del intervalo $(DF_{1-\alpha}; +\infty)$, por lo que no se rechaza la hipótesis nula del contraste basado en $\hat{\tau}_{\mu}$. De esta forma, la conclusión debe ser $\rho = 1$ asumiendo que $\mu = 0$.
- Si el valor $\hat{t}_{\rho\mu}$ se compara con el valor crítico de la t_{T-2} , $-t_{T-2; \alpha}$, resulta que $\hat{t}_{\rho\mu} < -t_{T-2; \alpha}$, rechazándose la hipótesis nula del contraste basado en la t_{T-2} . Por tanto, la conclusión sería $\rho < 1$, siendo $\mu \neq 0$, pero excluyendo el caso $\rho < 1$ y $\mu = 0$, correspondiente al error de tipo II del contraste basado en $\hat{\tau}_{\mu}$.

Por tanto, si el valor $\hat{t}_{\rho\mu}$ está en la zona B lo más probable es que sea porque o bien $\rho = 1$ y $\mu = 0$, o bien $\rho < 1$ y $\mu \neq 0$.

Como se ha podido observar la decisión sobre ρ en la zona B es diferente dependiendo de la distribución que se utilice en el contraste. De esta forma, cuando el valor $\hat{t}_{\rho\mu}$ caiga en esta zona B, el no elegir la distribución correcta llevaría a tomar una decisión errónea sobre ρ . Por ello, llamamos a B, zona de duda.

Si pudiésemos determinar que $\mu = 0$ o $\mu \neq 0$, podríamos decantarnos por una u otra distribución y poder así tomar una decisión sobre ρ . Esto nos lleva a analizar en la

siguiente sección la distribución del estadístico t asociado a la estimación MCO de μ en (6).

Los valores críticos de $t_{\rho\tau}$ que determinan las zonas de aceptación, rechazo y duda descritas para este estadístico aparecen en la tabla C del anexo, para distintos tamaños muestrales.

Las consecuencias que se derivan según la zona en la que caiga el valor calculado de $t_{\rho\tau}$ aparecen resumidas en la tabla 3.

B) CONTRASTE SOBRE μ

B.1) Distribución de t_μ

El estadístico t asociado a la estimación MCO de μ en (6), y que hemos denotado t_μ , puede utilizarse para llevar a cabo el contraste de significación sobre μ

$$\begin{aligned}H_0 &: \mu = 0 \\H_1 &: \mu \neq 0\end{aligned}$$

La distribución de este estadístico bajo H_0 , depende del valor de ρ . Concretamente, cuando $\rho = 1$, el estadístico t_μ bajo H_0 , denotado por $\hat{\tau}_{\alpha\mu}$, tiene una distribución no conocida, cuya representación fue obtenida por Dickey y Fuller (1981). Estos autores obtuvieron por simulación algunos cuantiles, tanto para la distribución límite como para algunos tamaños de muestra finitos (Dickey y Fuller, 1981, p. 1062). Se trata de una distribución bimodal y simétrica con mayor dispersión que una t de Student.

Por otro lado, cuando $|\rho| < 1$, el teorema 2 de Fuller, Hasza y Goebel (1981) establece que la distribución límite del estadístico t_μ para $\mu = 0$, bajo los supuestos de Y_0 constante y $e_t \sim iid(0, \sigma^2)$, es $N(0,1)$. Según el teorema 4 de estos mismos autores, esta normalidad asintótica se mantiene en el caso explosivo $|\rho| > 1$, si y sólo si $e_t \sim NI(0, \sigma^2)$.

En este último caso la $N(0,1)$ es la distribución asintótica, por lo que emplearemos la t de Student con $T - 2$ grados de libertad como aproximación a la distribución de t_μ para $\mu = 0$, $|\rho| \neq 1$ y tamaños de muestra finitos.

B.2) Contraste de la hipótesis $\mu = 0$

Es claro que el estadístico t_μ proporciona un test no similar de la hipótesis $\mu = 0$, por lo que, nuevamente, consideramos las dos distribuciones mencionadas para realizar el contraste bilateral sobre μ planteado más arriba. En la figura 4 se representa conjuntamente

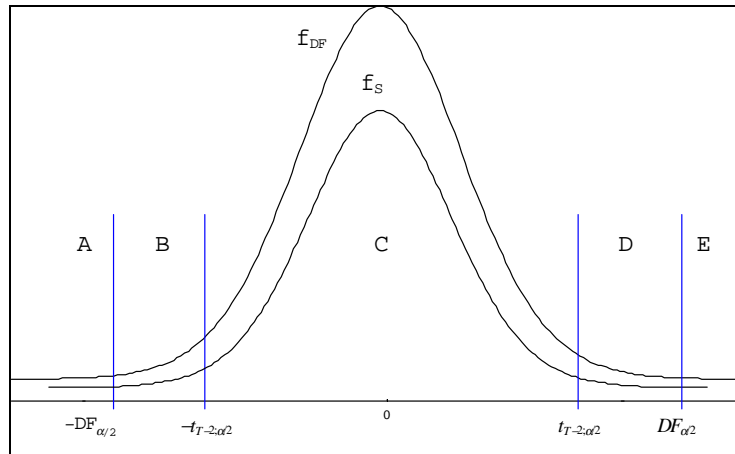


Figura 4. Densidad de t_μ bajo $\mu = 0$, según el valor de ρ

Fuente: Elaboración propia.

la densidad empírica⁷ de $\hat{\tau}_{\alpha\mu}$ para un valor de T y la densidad de la t_{T-2} , denotadas f_{DF} y f_S , respectivamente.

En la figura 4 se puede observar la simetría de la distribución para el caso $\rho = 1$, $\mu = 0$, aunque para un mismo nivel de significación estos valores críticos, en valor absoluto, son mayores que los de la t de Student. Concretamente, $DF_{\alpha/2}$ representa el cuantil de orden $\alpha/2$ de la distribución empírica de $\hat{\tau}_{\alpha\mu}$, de forma que el intervalo $(-DF_{\alpha/2}; DF_{\alpha/2})$ constituye la región de aceptación del contraste bilateral

$$\begin{aligned} H_0 : \mu &= 0 \quad (\text{asumiendo } \rho = 1) \\ H_1 : \mu &\neq 0 \end{aligned}$$

que se llevaría a cabo en caso de que se conociera que $\rho = 1$.

En cambio, si se utilizan los valores críticos de la t de Student con $T - 2$ grados de libertad, se obtiene la región de aceptación $(-t_{T-2, \alpha/2}; t_{T-2, \alpha/2})$ correspondiente al contraste

$$\begin{aligned} H_0 : \mu &= 0 \quad (\text{asumiendo } |\rho| \neq 1) \\ H_1 : \mu &\neq 0 \end{aligned}$$

que realizaríamos en el caso de que se conociera que $|\rho| \neq 1$.

⁷Aunque no quede reflejado en la figura 4, la distribución empírica de $\hat{\tau}_{\alpha\mu}$ es bimodal (ver Dickey y Fuller (1981), p. 1064).

Si no se dispone de información acerca de ρ , el contraste se lleva a cabo utilizando las dos distribuciones simultáneamente, cuyos valores críticos determinan una serie de zonas que quedan reflejadas en la figura 4. Esto permitirá sacar algunas conclusiones sobre los parámetros μ y ρ , dependiendo de la zona en la que caiga el valor calculado del estadístico t_μ (\hat{t}_μ en lo sucesivo).

La **zona C**, $(-t_{T-2;\alpha/2}; t_{T-2;\alpha/2})$, constituye la región de aceptación del contraste sobre μ basado en las dos distribuciones. Un valor estimado del estadístico t_μ dentro de esta zona, pertenece al mismo tiempo a las regiones de aceptación de los contrastes basados en $\hat{\tau}_{\alpha\mu}$ y en la t_{T-2} , lo que impide rechazar las hipótesis nulas de dichos contrastes. Por tanto, cuando el valor observado de t_μ esté en la zona C se concluye que $\mu = 0$, pudiendo ρ tomar cualquier valor.

Los intervalos $(-\infty; -DF_{\alpha/2})$ y $(DF_{\alpha/2}; +\infty)$, **zonas A** y **E**, respectivamente, constituyen la región crítica del contraste sobre μ basado en las dos distribuciones. Cuando el valor observado del estadístico t_μ cae en alguna de estas zonas, se tiene $|\hat{t}_\mu| > |DF_{\alpha/2}| > |t_{T-2;\alpha/2}|$, y se rechaza la hipótesis nula tanto del contraste basado en $\hat{\tau}_{\alpha\mu}$ como la del contraste basado en la t_{T-2} . Por tanto, se concluye que $\mu \neq 0$, pudiendo ρ tomar cualquier valor.

Finalmente, si el valor calculado de t_μ cae en la **zona B** o intervalo $(-DF_{\alpha/2}; -t_{T-2;\alpha/2})$, o en la **zona D** o intervalo $(t_{T-2;\alpha/2}; DF_{\alpha/2})$, pueden plantearse dos situaciones:

- a) Si dicho valor calculado se compara con los valores críticos de Dickey y Fuller, se llega a la conclusión de que $\mu = 0$, debiendo asumir que $\rho = 1$, pues se ha utilizado el contraste basado en $\hat{\tau}_{\alpha\mu}$.
- b) Si se compara con los valores críticos de la t_{T-2} , se rechaza la hipótesis nula ($\mu = 0$). Además, teniendo en cuenta que el caso $\mu \neq 0$, $\rho = 1$ forma parte del error de tipo II del contraste basado en $\hat{\tau}_{\alpha\mu}$, se puede asumir que $|\rho| \neq 1$.

Por tanto, si el valor calculado del estadístico t_μ cae en la zona B o D, lo más probable es que $\mu = 0, \rho = 1$ o $\mu \neq 0, |\rho| \neq 1$.

Estamos nuevamente ante dos zonas de duda, la cual se resolvería si conociésemos si $\rho = 1$ o $|\rho| \neq 1$. No obstante, si tenemos en cuenta que acudimos al contraste sobre μ porque tenemos duda en el contraste sobre ρ , pero que a su vez puede surgir duda sobre μ que solo se resuelve si tenemos información acerca de ρ , vemos que entramos en un círculo vicioso. Esta situación extrema la intentamos resolver con un contraste global tipo F .

Los valores críticos de t_μ que delimitan las zonas descritas se encuentran en la tabla C del anexo. Por otro lado, la tabla 4 resume las conclusiones a las que se llega según la zona en la que cae el valor calculado de t_μ .

Tabla 4. Consecuencia según la zona en la que cae el valor \hat{t}_μ

Zona	Extremos	Consecuencia
A	$(-\infty; -DF_{\alpha/2})$	$\mu \neq 0, \rho$ cualquiera
B	$(-DF_{\alpha/2}; -t_{T-2, \alpha/2})$	$\mu = 0, \rho = 1$ ó $\mu \neq 0, \rho \neq 1$
C	$(-t_{T-2, \alpha/2}; t_{T-2, \alpha/2})$	$\mu = 0, \rho$ cualquiera
D	$(t_{T-2, \alpha/2}; DF_{\alpha/2})$	$\mu = 0, \rho = 1$ ó $\mu \neq 0, \rho \neq 1$
E	$(DF_{\alpha/2}; +\infty)$	$\mu \neq 0, \rho$ cualquiera

Fuente: Elaboración propia.

C) DISTRIBUCIÓN DEL ESTADÍSTICO Φ_1 Y CONTRASTE ASOCIADO

A partir de la estimación MCO del modelo (6) se puede construir un estadístico tipo F , denotado Φ_1 , que permita realizar el contraste global

$$H_0 : \rho = 1, \quad \mu = 0$$

$$H_1 : \text{no se cumple } H_0$$

Dickey y Fuller (1981) caracterizaron la distribución límite de Φ_1 , la cual no es una F de Snedecor, y obtuvieron empíricamente algunos valores críticos para tamaños de muestra finitos y para la distribución límite (Dickey y Fuller, 1981, Tabla IV, p. 1063).

Es evidente que si se acepta la hipótesis nula se concluye que $\rho = 1$ y $\mu = 0$. Sin embargo, el rechazar H_0 nos lleva a no poder decidir nada sobre ρ , pues el rechazo puede deberse a que $\mu \neq 0$ y/o $|\rho| \neq 1$.

2.3. Planteamiento y estimación del modelo sin constante ni tendencia determinista lineal

Planteamos el modelo en su forma más simple. Por tanto, se estima por MCO el modelo

$$(7) \quad Y_t = \rho Y_{t-1} + e_t \quad t = 1, 2, \dots, T$$

donde ρ es un parámetro desconocido y para el que se asume $Y_0 = 0$ y $e_t \sim \text{NI}(0, 1)$. De dicha estimación obtenemos el siguiente estimador y estadístico:

$\hat{\rho}$: Estimador MCO del parámetro ρ .

t_ρ : Estadístico t asociado a la estimación MCO de ρ .

El contraste más realizado es el de raíz unitaria ($\rho = 1$), y al estadístico t_ρ para $\rho = 1$ se le suele dar la notación específica de $\hat{\tau}$.

A) DISTRIBUCIÓN DE $\hat{\tau}$ Y CONTRASTE ASOCIADO

El estadístico $\hat{\tau}$ permite llevar a cabo sobre (7) el contraste unilateral

$$\begin{aligned}H_0 &: \rho = 1 \\H_1 &: \rho < 1\end{aligned}$$

La distribución límite de este estadístico fue obtenida por Dickey y Fuller (1979) bajo los supuestos⁸ $Y_0 = 0$ y $e_t \sim \text{NID}(0, \sigma^2)$. Se trata de una distribución no conocida, para la que Dickey (1976) calculó por simulación algunos cuantiles, para tamaños de muestra finitos y para la distribución límite (Fuller, 1996, p. 642).

En este caso el estadístico proporciona un test similar ya que su distribución bajo la hipótesis nula de existencia de raíz unitaria no depende de los valores que tome ningún parámetro, puesto que no hay más parámetros. Por tanto, si el valor calculado de $\hat{\tau}$ es menor que el valor crítico de Dickey y Fuller se rechaza la hipótesis nula y la serie Y_t no tiene raíz unitaria. En cambio, si el valor de $\hat{\tau}$ es mayor que dicho valor crítico, concluimos que Y_t es un paseo aleatorio.

3. EVIDENCIA EMPÍRICA

Con el fin de ilustrar la problemática presentada, presentamos a continuación un ejemplo donde se puede apreciar el error en que se incurre a la hora de tomar una decisión sobre la existencia o no de raíz unitaria, quedando patente la incidencia de la no similaridad del contraste. Asimismo, para resolver este error, proponemos aplicar una estrategia de contraste secuencial en base a los desarrollos de la sección 2.

⁸En realidad, la distribución límite de $\hat{\tau}$ no depende de Y_0 y se mantiene para $e_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$ (Dickey y Fuller (1979, p. 430).

Sea el siguiente proceso generador de datos:

$$Y_t = 1 + t + 0.8Y_{t-1} + e_t \quad t = 1, 2, \dots, T$$

Como se puede apreciar, se trata de un proceso sin raíz unitaria, con constante ($\mu = 1$) y con tendencia determinista lineal t de coeficiente $\beta = 1$. Tomando $e_t \sim N(0, 1)$ generamos una muestra de tamaño $T = 100$ para analizarla.

Nuestro objetivo es contrastar la existencia de raíz unitaria. Para ello partimos del supuesto de que no conocemos el proceso generador, y empezamos planteando el modelo completo:

$$(8) \quad Y_t = \mu + \beta t + \rho Y_{t-1} + e_t$$

De la estimación MCO de (8) se obtienen los valores calculados $\hat{t}_{\rho_\tau} = -3.3588$ y $\hat{t}_{\beta_\tau} = 3.3857$, los cuales permiten contrastar las hipótesis nulas $H_0 : \rho = 1$ y $H_0 : \beta = 0$, respectivamente.

Para llevar a cabo el contraste unilateral de raíz unitaria tal y como se suele hacer en la práctica, es decir, sin tener en cuenta la no similaridad, tomamos el valor crítico de Dickey-Fuller, que para $T = 100$ y al 5%, es -3.45 (Fuller, 1996, p. 642). En este caso, $\hat{\tau}_\tau = \hat{t}_{\rho_\tau} = -3.3588$, por lo que no se rechaza la existencia de raíz unitaria. Además, al utilizar el valor crítico de Dickey-Fuller, la decisión se debe tomar asumiendo que $\beta = 0$. Vemos, pues, que no considerar la no similaridad del contraste nos lleva a tomar una decisión errónea.

No obstante, si tenemos en cuenta la no similaridad del contraste basado en t_{ρ_τ} , y consideramos las dos distribuciones extremas expuestas en la sección 2, se observa que el valor calculado del estadístico (-3.3588) está comprendido entre los valores -3.45 y -1.66 (tabla A del anexo), es decir, está en lo que en la figura 1 hemos denominado zona B o zona de duda. Si estamos en esta zona, lo más probable es que sea porque $\rho = 1$, $\beta = 0$, o porque $\rho < 1$, $\beta \neq 0$, con independencia del valor de μ , en ambos casos. Esto significa que no podemos llegar a una conclusión definitiva acerca de la existencia de raíz unitaria, ya que todo depende del valor de β . Por ello, planteamos el siguiente contraste:

$$\begin{aligned} H_0 : \beta &= 0 \\ H_1 : \beta &\neq 0 \end{aligned}$$

que como se vio en la sección 2, se trata de un test no similar, ya que la distribución del estadístico \hat{t}_{β_τ} que nos permite llevar a cabo el contraste, depende de los valores que tomen tanto ρ como μ . De la tabla B del anexo obtenemos los valores críticos ($T = 100$) que corresponden al contraste bilateral de β al 5%, y como el valor calculado del estadístico \hat{t}_{β_τ} es 3.3857, se observa que estamos en lo que en la figura 2 hemos denominado zona F, es decir, la zona determinada por el valor crítico superior de

Dickey-Fuller (3.14) y por el valor crítico superior de la distribución $-\hat{\tau}_\tau$ (3.73). Por tanto, también estamos en zona de duda en relación al contraste sobre β . No obstante, teniendo en cuenta lo comentado para esta zona F en la sección 2, podemos decir que lo más probable es que esta situación se deba bien a que $\beta = 0$, $\rho = 1$ y $\mu \neq 0$, o bien a $\beta \neq 0$ con ρ y μ cualesquiera. En cualquier caso, la duda persiste.

Ante esta situación recurrimos al estadístico Φ_3 , es decir, a contrastar

$$\begin{aligned} H_0 : \rho = 1, \quad \beta = 0 \\ H_1 : \text{no se cumple } H_0 \end{aligned}$$

El valor calculado de Φ_3 resultó igual a 6.90, que comparado con el valor crítico de Dickey-Fuller al 5% para $T = 100$ (6.49) nos lleva a rechazar la hipótesis nula, concluyendo que no se cumple al mismo tiempo que $\rho = 1$ y $\beta = 0$. Esto nos permite descartar una de las dos situaciones más probables que se podían dar, y concluimos que $\rho < 1$, $\beta \neq 0$, pudiendo μ tomar cualquier valor.

Como se puede comprobar, al tener en cuenta la no similaridad de los contrastes de raíz unitaria, hemos llegado a tomar una decisión sobre los parámetros que coincide con el proceso generador de datos. En cambio, si no hubiésemos tenido en cuenta la no similaridad habríamos, tomado una decisión errónea.

Esta estrategia de contraste utilizada en el ejemplo anterior aparece generalizada para los procesos generadores (5) y (6) en los diagramas A y B, respectivamente, del anexo.

4. EXPERIMENTO MONTE CARLO

En esta sección analizamos el número de veces que los valores calculados de los estadísticos t considerados, caen en las diferentes zonas establecidas como consecuencia de tener en cuenta la no similaridad del contraste de raíz unitaria.

Para ello, en primer lugar, se diseñó un experimento Monte Carlo usando el modelo

$$(9) \quad Y_t = \mu + \rho Y_{t-1} + e_t \quad t = 1, \dots, T$$

Tomando en (9) $Y_0 = 0$ y $e_t \sim N(0, 1)$, se generaron 2000 muestras de tamaño $T = 100$ para $\rho = 0.8, 0.9, 0.95, 0.99, 1$, y $\mu = 0, 0.5, 1, 5, 10$. Todas las simulaciones se llevaron a cabo usando rutinas desarrolladas en *EViews* 3.0.

Con cada serie generada se estimó por MCO un modelo autorregresivo de orden 1 con constante, obteniéndose los valores calculados de los estadísticos $t_{\rho\mu}$ y t_μ .

Las tablas 5 y 6 recogen el número de veces en % que el valor calculado de cada estadístico cae en las diferentes zonas establecidas para cada uno de ellos en la sección

2 para un $\alpha = 0.05$. Por ejemplo, cuando $\mu = 1$ y $\rho = 0.9$, el 74.70% de los valores calculados de $t_{\rho\mu}$ caen en la zona A, el 25.05% en la zona B, y el 0.25% restante en la zona C.

Tabla 5. Número de veces (en %) que el valor calculado $t_{\rho\mu}$ cae en cada zona

		ZONA		
		A	B	C
$T = 100$ $\alpha = 0.05$		$-\infty$	$DF_{1-\alpha}$	$-t_{T-2;\alpha}$
$\mu = 0$	$\rho = 0.8$	87.10	12.90	
	$\rho = 0.9$	30.85	63.95	5.20
	$\rho = 0.95$	10.90	64.15	24.95
	$\rho = 0.99$	6.45	44.30	49.25
	$\rho = 1$	5	40.05	54.95
$\mu = 0.5$	$\rho = 0.8$	90.90	9.10	
	$\rho = 0.9$	43.20	54.70	2.10
	$\rho = 0.95$	22.15	65	12.85
	$\rho = 0.99$	5.50	31.60	62.90
	$\rho = 1$	0.85	9.20	89.95
$\mu = 1$	$\rho = 0.8$	96.60	3.40	
	$\rho = 0.9$	74.70	25.05	0.25
	$\rho = 0.95$	66.10	32.25	1.65
	$\rho = 0.99$	19.75	45.60	34.65
	$\rho = 1$	0.30	6.20	93.50
$\mu = 5$	$\rho = 0.8$	100		
	$\rho = 0.9$	100		
	$\rho = 0.95$	100		
	$\rho = 0.99$	100		
	$\rho = 1$	0.25	5.25	94.50
$\mu = 10$	$\rho = 0.8$	100		
	$\rho = 0.9$	100		
	$\rho = 0.95$	100		
	$\rho = 0.99$	100		
	$\rho = 1$	0.40	4.35	95.25

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 6. Número de veces (en %) que el valor calculado t_{μ} cae en cada zona

		ZONA					
		A	B	C	D	E	
$T = 100$							
$\alpha = 0.05$							
		$-\infty$	$-DF_{\alpha/2}$	$-t_{T-2;\alpha/2}$	$t_{T-2;\alpha/2}$	$DF_{\alpha/2}$	$+\infty$
$\mu = 0$	$\rho = 0.8$	0.45	2.85	92.65	3.65	0.40	
	$\rho = 0.9$	0.55	3.60	91.35	4.25	0.25	
	$\rho = 0.95$	0.90	4.70	88.35	5.45	0.60	
	$\rho = 0.99$	2.25	9.05	77.60	9.15	1.95	
	$\rho = 1$	2.05	10.90	72.95	11.50	2.60	
$\mu = 0.5$	$\rho = 0.8$			2.25	30.90	66.85	
	$\rho = 0.9$			9.25	50.40	40.35	
	$\rho = 0.95$			14.15	54.50	31.35	
	$\rho = 0.99$			14.70	43.25	42.05	
	$\rho = 1$			12.10	38.10	49.80	
$\mu = 1$	$\rho = 0.8$				3.95	96.05	
	$\rho = 0.9$			0.20	13.70	86.10	
	$\rho = 0.95$			0.10	8.40	91.50	
	$\rho = 0.99$				1.10	98.90	
	$\rho = 1$				0.20	99.80	
$\mu = 5$	$\rho = 0.8$					100	
	$\rho = 0.9$					100	
	$\rho = 0.95$					100	
	$\rho = 0.99$					100	
	$\rho = 1$					100	
$\mu = 10$	$\rho = 0.8$					100	
	$\rho = 0.9$					100	
	$\rho = 0.95$					100	
	$\rho = 0.99$					100	
	$\rho = 1$					100	

Fuente: Elaboración propia.

La tabla 5 muestra que la distribución empírica de $t_{\rho\mu}$ bajo $\rho = 1$ (hipótesis nula) está fuertemente influenciada por el valor de μ . Así, cuando $\mu = 0$ y $\rho = 1$, el 5% de los

valores calculados caen en la zona A, es decir, a la izquierda del valor crítico de Dickey-Fuller, confirmándose la distribución empírica que para el estadístico $\hat{\tau}_\mu$ obtuvieron estos autores. No obstante, cuando μ aumenta ($\mu = 1, 5, 10$), aproximadamente el 95% de los valores calculados caen en la zona C, es decir, a la derecha del valor crítico de la t de Student, y el resto en la zona B. Este hecho confirma el resultado de Nankervis y Savin (1985) relativo a que cuando μ tiende a infinito la distribución de $t_{\rho\mu}$ bajo $\rho = 1$ tiende a una t de Student con $T - 2$ grados de libertad.

Por otro lado, se observa que cuando ρ está próximo a la unidad (0.9, 0.95, 0.99) un alto porcentaje de valores calculados de $t_{\rho\mu}$ caen en la zona de duda B. Por ejemplo, cuando $\mu = 0.5$ y $\rho = 0.95$, el 65% de estos valores caen en la citada zona B. De esta forma, si en este caso se usan los valores críticos de Dickey-Fuller para llevar a cabo el contraste de raíz unitaria, aceptaríamos erróneamente la hipótesis nula en el 65% de los casos. En cambio, si se utilizan los valores críticos de la t de Student se tomaría la decisión correcta. Vemos que la baja potencia que caracteriza al contraste de Dickey-Fuller para alternativas próximas a la unidad es debida a la no similaridad de dicho contraste. De esta forma, si se tiene en cuenta la no similaridad llevando a cabo el contraste en la forma expuesta en el ejemplo de la sección 3, podemos mejorar, en parte, la potencia.

Por otra parte, en la tabla 6 se puede observar la influencia del parámetro ρ en la distribución empírica del estadístico t_μ bajo $\mu = 0$. Concretamente, cuando $\rho = 1$, aproximadamente el 95% de los valores calculados de t_μ caen entre los valores críticos de Dickey-Fuller (zonas B, C y D), lo que confirma los resultados que sobre la distribución de $\hat{\tau}_{\alpha\mu}$ obtuvieron estos autores. En cambio, a medida que disminuye ρ , ese 95% se va concentrando en la zona C, aproximándose al comportamiento de una t de Student.

En las alternativas, es decir, en los casos en que $\mu \neq 0$, el valor del parámetro ρ apenas influye en la distribución del porcentaje de valores calculados en las distintas zonas. Así, cuando $\mu = 5$ y 10, la totalidad de estos valores caen en la zona E o zona de rechazo con ambas distribuciones. El problema surge cuando $\mu = 0.5$ y 1, pues, en estos casos un alto porcentaje de valores calculados caen en la zona de duda D. Este porcentaje (con un valor máximo de 54.50 en $\mu = 0.5$ y $\rho = 0.95$) corresponde a aceptaciones erróneas de la hipótesis nula ($\mu = 0$), motivadas por el uso indebido, para el contraste, de la distribución de Dickey-Fuller, en lugar de la t de Student.

De forma análoga, se diseñó un experimento Monte Carlo usando el modelo

$$(10) \quad Y_t = \mu + \beta t + \rho Y_{t-1} + e_t \quad t = 1, 2, \dots$$

Tomando en (10) $Y_0 = 0$ y $e_t \sim N(0, 1)$, se generaron 2000 muestras de tamaño $T = 100$ para $\rho = 0.8, 0.9, 0.95, 0.99, 1$, $\beta = 0, 0.1, 1$, y $0, 1, 10$.

Con cada serie generada se estimó por MCO un modelo autorregresivo de orden 1 con constante y tendencia determinista lineal, obteniéndose los valores calculados de los estadísticos $t_{\rho\tau}$ y $t_{\beta\tau}$.

Tabla 7. Número de veces (en %) que el valor calculado $t_{\rho, \tau}$ cae en cada zona

		$T = 100$ $\alpha = 0.05$	ZONA		
			A	B	C
		$-\infty$	$DF_{1-\alpha}$	$-t_{T-3; \alpha}$	
$\rho = 0.8$	$\mu = 0$	$\beta = 0$	64.35	35.65	
		$\beta = 0.1$	66.20	33.75	0.05
		$\beta = 1$	100		
	$\mu = 1$	$\beta = 0$	78.25	21.25	
		$\beta = 0.1$	71.70	28.30	
		$\beta = 1$	96.75	3.25	
	$\mu = 10$	$\beta = 0$	100		
		$\beta = 0.1$	100		
		$\beta = 1$	100		
$\rho = 0.9$	$\mu = 0$	$\beta = 0$	19.45	78.80	1.75
		$\beta = 0.1$	28.90	70.15	0.95
		$\beta = 1$	100		
	$\mu = 1$	$\beta = 0$	34.60	64.45	0.95
		$\beta = 0.1$	18.95	79.50	1.55
		$\beta = 1$	100		
	$\mu = 10$	$\beta = 0$	100		
		$\beta = 0.1$	100		
		$\beta = 1$	82.45	17.55	
$\rho = 0.95$	$\mu = 0$	$\beta = 0$	8.70	80.95	10.35
		$\beta = 0.1$	37.60	58.90	3.50
		$\beta = 1$	100		
	$\mu = 1$	$\beta = 0$	14.25	76.10	9.65
		$\beta = 0.1$	12.55	74.60	12.85
		$\beta = 1$	100		
	$\mu = 10$	$\beta = 0$	100		
		$\beta = 0.1$	100		
		$\beta = 1$	100		
$\rho = 0.99$	$\mu = 0$	$\beta = 0$	4.75	72.60	22.65
		$\beta = 0.1$	17.65	62.50	19.85
		$\beta = 1$	100		
	$\mu = 1$	$\beta = 0$	3.50	57.10	39.40
		$\beta = 0.1$	11.75	61.50	26.75
		$\beta = 1$	100		
	$\mu = 10$	$\beta = 0$	19.30	62.35	18.35
		$\beta = 0.1$	5.50	70.80	23.70
		$\beta = 1$	100		
$\rho = 1$	$\mu = 0$	$\beta = 0$	5.05	71.60	23.35
		$\beta = 0.1$	0.10	7.30	92.60
		$\beta = 1$	0.10	4.50	95.40
	$\mu = 1$	$\beta = 0$	5.40	69.05	25.55
		$\beta = 0.1$	0.10	6.45	93.45
		$\beta = 1$	0.10	5.65	94.25
	$\mu = 10$	$\beta = 0$	5.65	69.95	24.40
		$\beta = 0.1$	0.10	6.30	93.60
		$\beta = 1$		5.85	94.15

Fuente: Elaboración propia.

Las tablas 7 y 8 recogen el número de veces en % que el valor calculado de cada estadístico cae en las diferentes zonas establecidas para cada uno de ellos en la sección 2 para un $\alpha = 0.05$.

En la tabla 7 se puede observar la influencia del valor del parámetro β en la distribución empírica de $t_{\rho\tau}$ bajo $\rho = 1$. Cuando $\beta = 0$, se cumple lo establecido por Dickey y Fuller, es decir, aproximadamente el 95% de los valores calculados de $t_{\rho\tau}$ caen a la derecha del valor crítico de Dickey- Fuller (zonas B y C). A medida que aumenta el valor de β , ese 95% se concentra en la zona C, esto es, a la derecha del valor crítico de la t de Student. Asimismo, se observa que este comportamiento no se ve afectado por el valor μ , confirmándose lo comentado en la sección 2 sobre la independencia de este parámetro en la distribución de $t_{\rho\tau}$ bajo $\rho = 1$.

Para los demás valores de ρ , se observa una influencia muy fuerte de la tendencia determinista lineal, pues, para $\beta = 1$ la totalidad de valores calculados del estadístico $t_{\rho\tau}$ caen en la zona A, es decir, en una zona donde se rechaza tanto con la distribución de Dickey-Fuller como con la t de Student. En cambio, cuando $\beta = 0.1$, esta influencia es menor, produciéndose un alto porcentaje de dudas. Por ejemplo, cuando $\rho = 0.9$, $\mu = 1$ y $\beta = 0.1$, el 79.5% caen en zona de duda (zona B). Esto se traduciría en una decisión errónea, si para el contraste de raíz unitaria se utilizan los valores críticos de Dickey-Fuller. De nuevo mejoraríamos la potencia del contraste si tenemos en cuenta de forma simultánea las dos distribuciones implicadas.

Finalmente, cuando $\rho < 1$ y $\beta = 0$, el porcentaje de valores calculados en las zonas B y C, pone de manifiesto la baja potencia del test de Dickey-Fuller para alternativas próximas a la unidad.

Por último, en la tabla 8 se observa la influencia de los parámetros μ y ρ en la distribución empírica de $t_{\beta\tau}$ bajo $\beta = 0$. Por un lado, cuando $\rho = 1$ y $\mu = 0$, el 95% de los valores calculados del estadístico $t_{\beta\tau}$ se distribuyen de una forma simétrica en las zonas B, C, D y E, tal y como establecen Dickey y Fuller. En cambio, cuando μ aumenta, este 95% se concentra en las zonas D, E y F, presentando un mayor porcentaje las dos primeras (36.75% y 49.60%, respectivamente, cuando $\mu = 1$). Esto confirma lo comentado en la sección 2 en relación a que la distribución de $t_{\beta\tau}$ para $\beta = 0$ y $\rho = 1$, tiende a la imagen en el espejo de la distribución de $\hat{\tau}_\tau$. Por otro lado, cuando $\rho \neq 1$ se observa una mayor concentración de los valores calculados de $t_{\beta\tau}$ en las zonas delimitadas por los valores críticos de la t_{T-3} , no afectando el valor del parámetro μ .

En los casos en que $\beta \neq 0$ y $\rho < 1$, el porcentaje de valores calculados que caen en la zona E corresponde a aceptaciones indebidas de la hipótesis nula provocadas por el uso indebido de los valores críticos de Dickey-Fuller en lugar de los de la t de Student. Encontramos un valor máximo de 59.75% para $\beta = 0.1$, $\mu = 1$ y $\rho = 0.9$.

Tabla 8. Número de veces (en %) que el valor calculado t_{β_T} cae en cada zona

		$T = 100$	ZONA						
		$\alpha = 0.05$	A	B	C	D	E	F	G
		$-\infty$	$-DF_{\alpha/2}$	$-t_{T-3, \alpha/2}$	$IM_{1-\alpha/2}$	$t_{T-3, \alpha/2}$	$DF_{\alpha/2}$	$IM_{\alpha/2}$	$+\infty$
$\rho = 0.8$	$\mu = 0$	$\beta = 0$	0.30	4.40	65	25.70	4.25	0.20	0.15
		$\beta = 0.1$				0.10	15.75	35.85	48.30
		$\beta = 1$						0.10	99.90
	$\mu = 1$	$\beta = 0$	0.10	3.70	62.75	27.85	5	0.40	0.20
		$\beta = 0.1$				0.05	16.85	32.50	50.60
		$\beta = 1$					0.55	7.70	91.75
	$\mu = 10$	$\beta = 0$	0.10	2.65	69.10	26.05	2	0.10	
		$\beta = 0.1$							100
		$\beta = 1$							100
$\rho = 0.9$	$\mu = 0$	$\beta = 0$	0.75	6.15	61.35	26.10	4.90	0.50	0.25
		$\beta = 0.1$				2.20	46.20	31.65	19.95
		$\beta = 1$							100
	$\mu = 1$	$\beta = 0$	0.10	2.70	58	30.60	8.05	0.40	0.15
		$\beta = 0.1$				7.60	59.75	22.35	10.30
		$\beta = 1$							100
	$\mu = 10$	$\beta = 0$	0.10	1.75	70.40	25.10	2.50	0.15	
		$\beta = 0.1$							100
		$\beta = 1$				0.20	8.25	22.90	68.65
$\rho = 0.95$	$\mu = 0$	$\beta = 0$	0.85	9.10	55.60	24.80	8.85	0.60	0.20
		$\beta = 0.1$			0.05	2.70	26.20	28.95	42.10
		$\beta = 1$							100
	$\mu = 1$	$\beta = 0$	0.05	1.75	46.60	39.90	10.45	1.10	0.15
		$\beta = 0.1$			0.45	18.90	55.60	17.35	7.70
		$\beta = 1$							100
	$\mu = 10$	$\beta = 0$	0.10	2.05	68.20	25.90	3.70	0.05	
		$\beta = 0.1$						0.10	99.90
		$\beta = 1$							100
$\rho = 0.99$	$\mu = 0$	$\beta = 0$	2.10	11.35	48.85	25	10.65	1.50	0.55
		$\beta = 0.1$					0.40	1.25	98.35
		$\beta = 1$							
	$\mu = 1$	$\beta = 0$		0.05	20.70	46.20	28.80	2.950	1.30
		$\beta = 0.1$				0.10	5.20	9.45	85.25
		$\beta = 1$							100
	$\mu = 10$	$\beta = 0$	0.05	1.10	64.35	30.40	40	0.05	0.05
		$\beta = 0.1$			2.45	36.30	50.35	8.40	2.50
		$\beta = 1$							100
$\rho = 1$	$\mu = 0$	$\beta = 0$	2.90	11.45	41.85	24.10	14.50	1.85	0.35
		$\beta = 0.1$						0.05	99.95
		$\beta = 1$							100
	$\mu = 1$	$\beta = 0$			2.95	36.75	49.60	8	2.70
		$\beta = 0.1$					0.10	0.95	98.95
		$\beta = 1$							100
	$\mu = 10$	$\beta = 0$			2.30	38.60	48.35	7.90	2.85
		$\beta = 0.1$			2.40	25.75	41.85	16.45	13.55
		$\beta = 1$							100

Fuente: Elaboración propia.

5. CONCLUSIONES

Con todo el desarrollo hasta aquí expuesto, del análisis de las distribuciones de los estadísticos que se emplean para los contrastes de raíces unitarias, podemos concluir lo siguiente:

- Queda patente la gran incidencia que tiene el carácter no similar de dichos contrastes.
- Si no se tiene en cuenta este problema, se puede incurrir claramente en decisiones erróneas cuando se realizan aplicaciones econométricas utilizando sólo los valores críticos de Dickey y Fuller para rechazar o no que $\rho = 1$.
- Como consecuencia del carácter no similar de los contrastes, se originan zonas de duda en el espacio paramétrico de los estadísticos, que crean incertidumbre a la hora de decidir sobre el rechazo de la hipótesis nula.
- Sin embargo, del estudio realizado se deduce que en caso de que exista incertidumbre en el contraste de ρ y también en el de β , la aplicación de los contrastes Φ_1 o Φ_3 puede llevarnos a la toma de decisión adecuada.
- De los resultados del experimento Monte Carlo se deduce que el porcentaje de casos que darían lugar a la aceptación indebida de la hipótesis nula, puede ser importante, habiendo resultado un valor superior al 79% en el modelo autorregresivo de orden 1 con constante y tendencia determinista lineal, y un 65% en el modelo solo con constante.

Actualmente, se está desarrollando una estrategia de contraste desde el punto de vista de la no similaridad, es decir, teniendo en cuenta las diferentes distribuciones correspondientes a los estadísticos implicados. En este sentido, se ha llevado a cabo un estudio Monte Carlo para analizar el funcionamiento de la misma en el modelo autorregresivo de orden 1 con constante (Dios y Roldán, 1998).

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ahn, S.K. (1993). «Some test for unit roots in autorregressive-integrated-moving average models with deterministic trends», *Biometrika*, 80, 855-868.
- Bhargava, A. (1986). «On the theory of testing for unit roots in observed time series», *Review of Economic Studies*, 53, 369-384.
- Bierens, H.J. and Guo, S. (1993). «Testing stationary and trend stationary against the unit root hypothesis», *Econometrics Reviews*, 12, 1-32.
- Choi, I. (1990). «Most U.S. Economic Time Series Do Not Have Unit Roots: Nelson and Plosser. Results Reconsidered», manuscrito, Universidad Estatal de Ohio.

- Dickey, D.A. (1976). «Estimation and Hypothesis Testing in Nonstationary Time Series». Ph.D. dissertation, Iowa State University.
- (1984). «Powers of unit root tests», *Proceedings of The American Statistical Association*, Business and Economic Statistics Section, 489-493.
- Dickey, D.A. and Fuller, W.A. (1979). «Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series With a Unit Root», *Journal of the American Statistical Association*, 74, 427-431.
- (1981). «Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series With a Unit Root», *Econometrica*, 49, 1057-1072.
- Dios, R. and Roldán, J.A. (1998). «Analysis of a non-similar unit root test: a Monte Carlo Investigation», *First International Conference on Applied Sciences and the Environment (ASE 98)*, 5-7 October 1998, Cadiz, Spain.
- Evans, G.B.A. and Savin, N.E. (1984). «Testing for unit roots: 2», *Econometrica*, 52, 5, 1241-1269.
- Ferretti, N. and Romo, J. (1996). «Unit root bootstrap tests for AR(1) models», *Biometrika*, 83, 4, 849-860.
- Fukushige, M.; Hatanaka, M. and Koto, Y. (1990). «A test on the attainability of equilibrium and its applications to international capital markets», Invited paper at the 6th World Congress of Econometric Society, August 1990.
- Fuller, Wayne A. (1976). *Introduction to Statistical Times Series*, New York: John Wiley & Sons.
- (1996). *Introduction to Statistical Times Series*, Second Edition, New York: John Wiley & Sons.
- Fuller, W.A., Hasza, P.D. and Goebel, J.J. (1981). «Estimation of the parameters of stochastic difference equations», *The Annals of Statistics*, 9, 3, 531-543.
- Guilkey, D.K. and Schmidt, P. (1989). «Extended tabulations for Dickey-Fuller tests», *Economics Letters*, 31, 355-357.
- Hall, A. (1989). «Testing for a unit root in the presence of moving average errors», *Biometrika*, 76, 49- 56.
- (1992). «Joint hypothesis tests for a random walk based on instrumental variables estimators», *Journal of Time Series Analysis*, 12, 29-45.
- Hasan, M.N. and Koenker, R.W. (1997). «Robust rank tests of the unit root hypothesis», *Econometrica*, 65, 1, 133-161.
- Hasza, D.P. (1977). «Estimation in Nonstationary Time Series». Ph.D. dissertation, Iowa State University.
- Hwang, J. and Schmidt, P. (1996). «Alternative methods of detrending and the power of unit root tests», *Journal of Econometrics*, 71, 227-248.
- Kahn, J.A. and Ogaki, M. (1992). «A consistent test for the null of stationary against the alternative of a unit root», *Economics Letters*, 39, 7-11.
- Kiviet, J.F. and Phillips, G.D.A. (1992). «An exact similar t-type test for unit roots», *University of Amsterdam*, mimeographed.

- (1992). «Exact similar tests for unit roots and cointegration», *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 54, 3, 349-367.
- Kwiatkowski, D.; Phillips, P.C.B.; Schmidt, P. and Shin, Y. (1992). «Testing the null hypothesis of stationary against the alternative of a unit root. How sure are we that economic time series have a unit root?», *Journal of Econometrics*, 54, 159-178.
- Leybourne, S.J. and McCabe, B.M.P. (1994). «A consistent test for a unit root», *Journal of Business and Economic Statistics*, 2, 157-166.
- Nankervis, J.C. and Savin, N.E. (1985). «Testing the autoregressive parameter with the t statistic», *Journal of Econometrics*, 27, 143-161.
- (1987). «Finite sample distributions of t and F statistics in an AR(1) model with an exogenous variable», *Econometric Theory*, 3, 387-408.
- Nelson, C.R. and Plosser, C.I. (1982). «Trends and random walks in macroeconomic time series: Some evidence and implications», *Journal of Monetary Economics*, 10, 139-162.
- Ogaki, M. and Park, J.Y. (1990). «A cointegration approach to estimating preference parameters», Paper presented at the Conference on Empirical Applications of Structural Models organized by Econometrica and Social Systems Research Institute (University of Wisconsin, Madison, WI).
- Pantula, S.G. and Hall, A. (1991). «Testing for unit roots in autoregressive moving average models», *Journal of Econometrics*, 48, 325-353.
- Phillips, P.C.B. (1987). «Time series regression with a unit root», *Econometrica*, 55, 2, 277-301.
- Phillips, P.C.B. and Perron, P. (1988). «Testing for a unit root in time series regression», *Biometrika*, 75, 335-346.
- Said, S.E. and Dickey, D.A. (1984). «Testing for unit roots in autoregressive-moving average models of unknown order», *Biometrika*, 71, 599-607.
- Sargan, J.D. and Bhargava, A. (1983). «Testing residuals from least squares regression for being generated by the gaussian random walk», *Econometrica*, 51, 153-174.
- Schmidt, P. and Phillips, P.C.B. (1992). «LM test for a unit root in the presence of deterministic trends», *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 54, 257-287.
- Schwert, G.W. (1989). «Tests for unit roots: A Monte Carlo investigation», *Journal of Business and Economic Statistics*, 7, 147-159.
- Shin, D.W. and So, B. (1997). «Semiparametric unit root tests based on symmetric estimators», *Statistical Probability Letters*, 33, 2, 177-184.
- Solo, V. (1984). «The order of differencing in ARIMA models», *Journal of the American Statistical Association*, 79, 388, 916-921.

ANEXO

Tabla A. Valores críticos del estadístico t_{ρ_T} para $\rho = 1$, según los valores de β (modelo $Y_t = \mu + \beta t + \rho Y_{t-1} + e_t$)

T	α	$DF_{1-\alpha}$	$-t_{T-3;\alpha}$
25	0.01	-4.38	-2.51
	0.025	-3.95	-2.07
	0.05	-3.60	-1.72
	0.10	-3.24	-1.32
50	0.01	-4.15	-2.41
	0.025	-3.80	-2.01
	0.05	-3.50	-1.68
	0.10	-3.18	-1.30
100	0.01	-4.04	-2.37
	0.025	-3.73	-1.98
	0.05	-3.45	-1.66
	0.10	-3.15	-1.29
250	0.01	-3.99	-2.33
	0.025	-3.69	-1.96
	0.05	-3.43	-1.65
	0.10	-3.13	-1.28
∞	0.01	-3.96	-2.34
	0.025	-3.66	-1.97
	0.05	-3.41	-1.65
	0.10	-3.12	-1.28

Fuente: Elaboración propia
 T : tamaño muestral.
 α : nivel de significación
 DF : valores críticos de Dickey-Fuller.
 t_{T-3} : valores críticos de la t de Student

Tabla B. Valores críticos del estadístico t_{β_T} para $\beta = 0$ según los valores de ρ y μ (modelo $Y_t = \mu + \beta t + \rho Y_{t-1} + e_t$)

T	α	Zona B Zona C			Zona E Zona F		
		$-DF_{\alpha/2}$	$-t_{T-3;\alpha/2}$	$IM_{1-\alpha/2}$	$t_{T-3;\alpha/2}$	$DF_{\alpha/2}$	$IM_{\alpha/2}$
25	$\alpha/2 = 0.025$	-3.25	-2.07	0.50	2.07	3.25	3.95
	$\alpha/2 = 0.05$	-2.85	-1.72	0.80	1.72	2.85	3.60
50	$\alpha/2 = 0.025$	-3.18	-2.01	0.58	2.01	3.18	3.80
	$\alpha/2 = 0.05$	-2.81	-1.68	0.87	1.68	2.81	3.50
100	$\alpha/2 = 0.025$	-3.14	-1.98	0.62	1.98	3.14	3.73
	$\alpha/2 = 0.05$	-2.79	-1.66	0.90	1.66	2.79	3.45
250	$\alpha/2 = 0.025$	-3.12	-1.96	0.64	1.96	3.12	3.69
	$\alpha/2 = 0.05$	-2.79	-1.65	0.92	1.65	2.79	3.43
∞	$\alpha/2 = 0.025$	-3.11	-1.96	0.66	1.96	3.11	3.66
	$\alpha/2 = 0.05$	-2.78	-1.65	0.94	1.65	2.78	3.41

Fuente: Elaboración propia
 T : tamaño muestral.
 α : nivel de significación
 DF : valores críticos de Dickey-Fuller.
 t_{T-3} : valores críticos de la t de Student
 IM : valores de la imagen en el espejo de los valores críticos de Dickey-Fuller para $\hat{\tau}_T$

Tabla C. Valores críticos del estadístico $t_{\rho\mu}$ para $\rho = 1$, según los valores de μ (modelo $Y_t = \mu + \rho Y_{t-1} + e_t$)

T	α	$DF_{1-\alpha}$	$-t_{T-2,\alpha}$
25	0.01	-3.75	-2.50
	0.025	-3.33	-2.07
	0.05	-3.00	-1.71
	0.10	-2.63	-1.32
50	0.01	-3.58	-2.41
	0.025	-3.22	-2.01
	0.05	-2.93	-1.68
	0.10	-2.60	-1.30
100	0.01	-3.51	-2.37
	0.025	-3.17	-1.98
	0.05	-2.89	-1.66
	0.10	-2.58	-1.29
250	0.01	-3.46	-2.33
	0.025	-3.14	-1.96
	0.05	-2.88	-1.65
	0.10	-2.57	-1.28
∞	0.01	-3.43	-2.34
	0.025	-3.12	-1.97
	0.05	-2.86	-1.65
	0.10	-2.57	-1.28

Fuente: Elaboración propia
 T : tamaño muestral.
 α : nivel de significación
 DF : valores críticos de Dickey-Fuller.
 t_{T-2} : valores críticos de la t de Student

Tabla D. Valores críticos del estadístico t_{μ} para $\mu = 0$ según los valores de ρ (modelo $Y_t = \mu + \rho Y_{t-1} + e_t$)

T	α	Zona B	Zona C	Zona D	$DF_{\alpha/2}$
		$-DF_{\alpha/2}$	$-t_{T-2,\alpha/2}$	$t_{T-2,\alpha/2}$	
25	$\alpha/2 = 0.025$	-2.97	-2.07	2.07	2.97
	$\alpha/2 = 0.05$	-2.61	-1.71	1.71	2.61
50	$\alpha/2 = 0.025$	-2.89	-2.01	2.01	2.89
	$\alpha/2 = 0.05$	-2.56	-1.68	1.68	2.56
100	$\alpha/2 = 0.025$	-2.86	-1.98	1.98	2.86
	$\alpha/2 = 0.05$	-2.54	-1.66	1.66	2.54
250	$\alpha/2 = 0.025$	-2.54	-1.66	1.66	2.54
	$\alpha/2 = 0.05$	-2.53	-1.65	1.65	2.53
∞	$\alpha/2 = 0.025$	-2.83	-1.97	1.97	2.83
	$\alpha/2 = 0.05$	-2.52	-1.65	1.65	2.52

Fuente: Elaboración propia
 T : tamaño muestral.
 α : nivel de significación
 DF : valores críticos de Dickey-Fuller.
 t_{T-2} : valores críticos de la t de Student

Diagrama A: ESTRATEGIA DE CONTRASTE

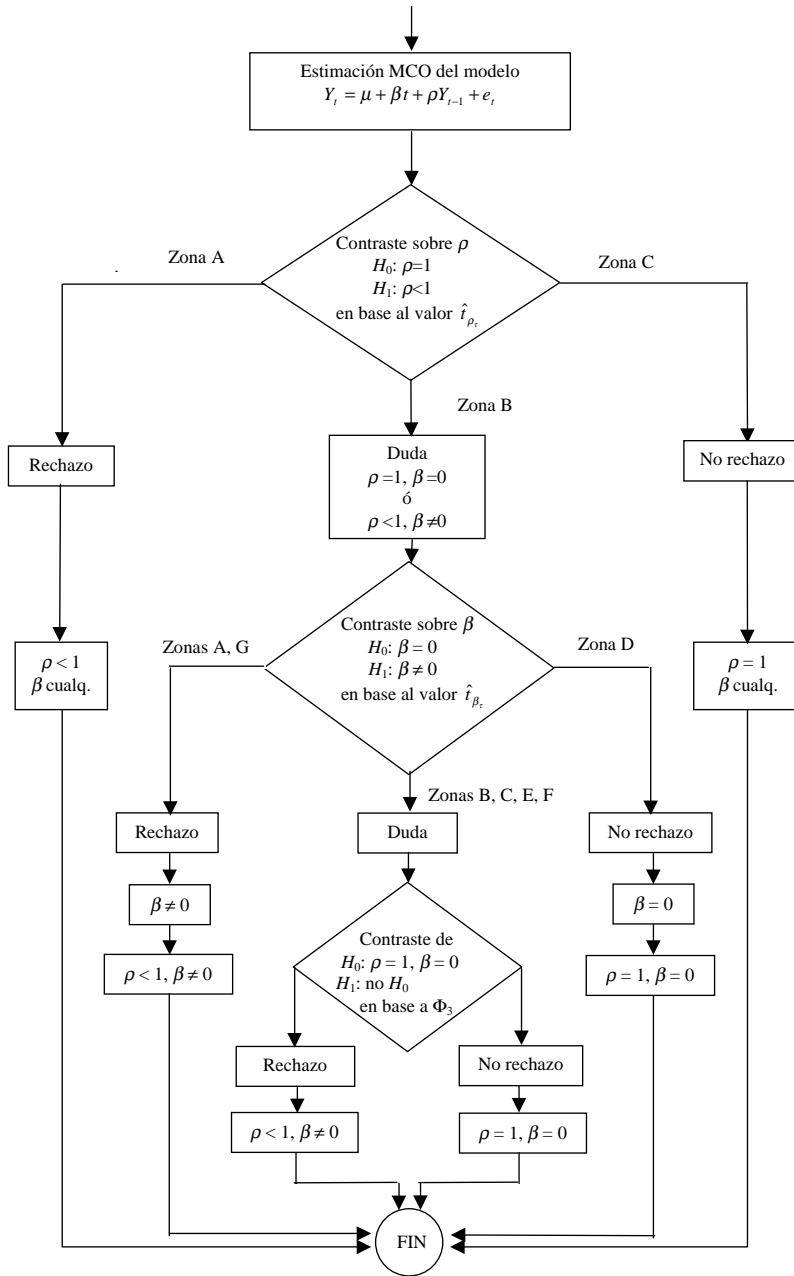
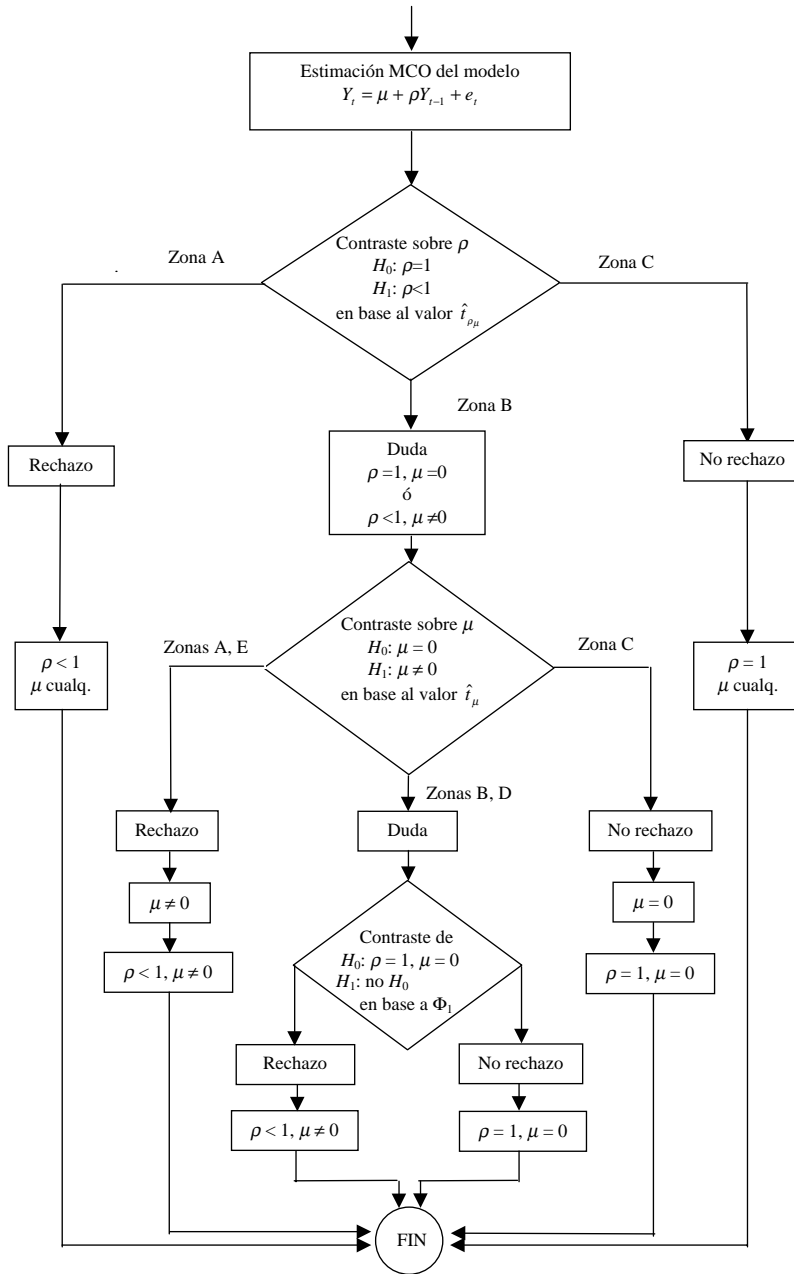


Diagrama B: ESTRATEGIA DE CONTRASTE



ENGLISH SUMMARY

TESTING FOR UNIT ROOTS IN TIME SERIES. AN ANALYSIS WITH NON-SIMILAR TESTS

JOSÉ ÁNGEL ROLDÁN CASAS

RAFAELA DIOS PALOMARES

Universidad de Córdoba*

The finite and limiting sample distributions of the t and F statistics are analyzed in the context of a first-order autoregressive model with an unknown intercept and/or a linear trend, where the initial value of the variable is a known constant. The sensitivity of the distributions to the values of the nuisance parameters of the models considered is examined. We propose a strategy for testing the unit root hypothesis in these models based on the no-similarity. It is an unusual one-sided test since it involves two distributions: the Student's t distribution and the distribution tabulated by Dickey and Fuller under the null hypothesis of unit root. In some cases, the critical values tabulated by Dickey and Fuller do not allow us to reject the hypothesis of a unit root, while we can reject it if we use Student's t . To solve these situations we test for the significance of the intercept or the linear trend and if the doubt continues we use F tests proposed by Dickey and Fuller (1981). Finally, in order to demonstrate the relevance of no-similarity Monte Carlo simulations are used to show that the testing strategy is more powerful than the one-sided test considered by Dickey and Fuller at stable alternatives.

Keywords: Unit root, stochastic trend, non-similar test, Dickey-Fuller test, Monte Carlo experiment

AMS Classification (MSC 2000): 62M10

*Universidad de Córdoba. Dpto. de Estadística e Investigación Operativa. E.S.I.A y de Montes. Apartado 3048. 14080 Córdoba.

–Received March 1998.

–Accepted March 2000.

A problem arising in many time-series applications is the question of whether a series should be differenced. This is equivalent to asking if the time series has a unit root.

Currently, practitioners may decide to difference a time series on the basis of a visual inspection of the autocorrelation function, or a statistic test.

Dickey and Fuller (1979, 1981) have proposed some test statistics for the unit root hypothesis for an observed time series. They derive the finite and limiting distributions of test statistics for a unit root when the estimated model is a random walk, a random walk with shift in mean, and a random walk with shift in mean and a linear time trend. The distribution of Dickey and Fuller tests relied on the innovation process e_t being white noise. These authors have restricted their work to autoregressive (AR) series. More precisely, in 1979 they presented a class of test statistics, known as Dickey-Fuller (DF) statistics, assuming that DGP is a pure AR(1) process. In 1981 they extended the DF test to an AR(p) process which is called 'augmented' Dickey-Fuller (ADF) test.

On the other hand, Nankervis and Savin (1985, 1987) showed that the statistics proposed by Dickey and Fuller yield non-similar tests of the unit root hypothesis. No similarity implies that the distribution of a test statistic is affected by the value, under the null, of a nuisance parameter. If the nuisance parameter is unknown it is possible for a mistake to be in either the rejection or non-rejection. Nankervis and Savin's non-similar tests of the random walk hypothesis involve two distributions and are substantially more powerful at most alternatives of interest than the similar tests considered by Dickey and Fuller (1981).

In this paper we assume that the data is generated by the first order autoregressive processes

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & Y_t = \rho Y_{t-1} + e_t & t = 1, 2, \dots \\
 (2) \quad & Y_t = \mu + \rho Y_{t-1} + e_t & t = 1, 2, \dots \\
 (3) \quad & Y_t = \mu + \beta t + \rho Y_{t-1} + e_t & t = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

where $Y_0 = 0$, μ, β y ρ are unknown real numbers and $\{e_t\}$ is a sequence of independent normal random variables with mean zero and variance σ^2 . We study the distributions of the t and F statistics for models considered, taking into account the values of the nuisance parameters. In the context of models (2) and (3), Dickey and Fuller (1979) obtained the limiting distribution of the t statistics of ρ for $\rho = 1$, under the assumptions that $\mu = 0$ and $\beta = 0$, respectively. These distributions are non-standard and Dickey and Fuller obtained the empirical quantiles of the limiting and finite sample distribution by Monte Carlo methods (Fuller 1996, p. 6).

On the other hand, for a fixed sample size, the distributions of the t statistics for both the exogenous and lagged dependent variables converge to Student's t as the drift coefficient and/or the coefficient of the exogenous variable increases in absolute value (Nankervis y Savim, 1985, 1987).

Therefore, the t statistics mentioned above yield non-similar tests of the unit root hypothesis since their distributions are influenced by the values of the nuisance parameters μ and β .

From the previous discussion we propose a testing strategy to test the unit root hypothesis in the context of models (2) and (3). This testing strategy takes into account the no-similarity and is based on the two distributions test introduced by Nankervis and Savin (1985), since it involves the two distributions of the t statistics of ρ under the null: the Student's t distribution and the distribution tabulated by Dickey and Fuller. In some cases, the critical values tabulated by Dickey and Fuller do not allow us to reject the hypothesis of a unit root, while we may reject it if we use Student's t . To solve these situations we test for the significance of the intercept or the linear trend, and if the doubt continues we use F tests proposed by Dickey and Fuller (1981).

Finally, in order to demonstrate the relevance of no-similarity, Monte Carlo simulations are used to show that the testing strategy proposed is more powerful than the one-sided test considered by Dickey and Fuller at stable alternatives.