

DEL POLIEDRO DEL AGENTE VIAJERO GRÁFICO AL DE RUTAS DE VEHÍCULOS CON DEMANDA COMPARTIDA

CARMEN MARTÍNEZ
ENRIQUE MOTA
Universitat de València*

En este trabajo abordamos el estudio del poliedro asociado al Problema de Rutas de Vehículos con Demanda Compartida, problema de distribución que surge cuando hay que repartir mercancías a un conjunto de clientes utilizando una flota fija de vehículos de capacidad limitada. El objetivo es diseñar las rutas de forma que se minimice la distancia total recorrida. Se diferencia de otros problemas más conocidos de rutas con capacidades en que se permite abastecer la demanda de cada cliente utilizando más de un vehículo. Presentamos resultados poliédricos que se obtienen como extensión de otros previamente conocidos para el Problema del Agente Viajero Gráfico.

From the graphical traveling salesman polyhedron to the one associated with the split delivery vehicle routing problem

Palabras clave: Rutas de vehículos, demanda compartida, poliedro, facetas

Clasificación AMS (MSC 2000): 90C10, 90C27, 90C35

*Departament d'Estadística i Investigació Operativa. Universitat de València. Dr. Moliner, 50. Burjassot, 46100. España. E-mail: M.Carmen.Martinez@uv.es

–Recibido en octubre de 1999.

–Aceptado en octubre de 2000.

1. INTRODUCCIÓN

El *Problema de Rutas de Vehículos con Demanda Compartida*, en adelante *SDVRP*, nos permite modelizar aquellos problemas de distribución en los que una empresa debe satisfacer, de la forma más económica posible, la demanda de una cartera de clientes, utilizando un número fijo de vehículos de capacidad limitada. El objetivo es diseñar una ruta para cada vehículo de manera que se abastezcan todas las demandas, ningún vehículo sirva más de lo que indica su capacidad y se minimice la distancia total recorrida por el conjunto de rutas. Así planteado, el problema responde a la versión clásica del *Problema de Rutas de Vehículos con Capacidades*, *CVRP* (ver Bodin *et al.*, 1983 y Christofides, 1985), sin embargo, en el *CVRP* no se contempla la posibilidad de servir la demanda de un cliente utilizando varios vehículos, algo admisible en el *SDVRP*, de ahí la calificación «*demanda compartida*».

El *SDVRP* fue estudiado por primera vez en Dror y Trudeau (1989), descubriéndose entonces su potencial para aportar soluciones más económicas para los problemas de distribución, pues, no únicamente reduce el número de vehículos necesario para abastecer la demanda total, sino que además, en ocasiones esto va acompañado de importantes ahorros en la distancia total recorrida. Otro problema resuelto al trabajar con el *SDVRP* es el de que siempre se conoce el número mínimo de vehículos necesario para abastecer toda la demanda, pues basta con que calculemos el cociente entre la demanda total y la capacidad del vehículo. En el caso del *CVRP* determinar el mínimo número de vehículos necesario implica resolver un problema *NP – duro*, el problema de *Bin-Packing* asociado a las demandas de los clientes y a cajas de capacidad igual a la de los vehículos, Garey y Johnson (1979). Sin embargo, aunque el *SDVRP* es una relajación del *CVRP*, y por tanto puede parecer más sencillo de resolver, es también un problema *NP – duro* (ver Dror y Trudeau, 1990), de ahí el interés que despierta el estudio del poliedro de soluciones asociado. Cabe esperar, como ocurre con otros problemas de rutas, como el *Problema del Agente Viajero* (Padberg y Rinaldi, 1991) o el mismo *CVRP* (Cornuéjols y Harche, 1993, y Augerat *et al.*, 1995), que el conocimiento de la estructura poliédrica del conjunto de soluciones asociado ayudará a resolver de forma exacta instancias del problema cada vez más grandes. Ampliar el estudio poliédrico presentado en Belenguer *et al.* (2000) y Martínez *et al.* (2000) es el objetivo principal que se pretende conseguir con el trabajo que aquí presentamos. Los dos trabajos anteriores junto con la revisión bibliográfica llevada a cabo en Belenguer *et al.* (2000), y el algoritmo tabú diseñado por Belenguer y Martínez (2000) constituyen un buen resumen del estado del arte en el problema.

Hemos organizado el artículo de la siguiente forma: en la Sección 2 introducimos la notación que vamos a utilizar y definimos formalmente el problema. En la Sección 3 revisamos las propiedades que deben cumplir las desigualdades válidas para el poliedro asociado al *Problema de Rutas de Vehículos con Demanda Compartida*. Estudiamos las desigualdades *path*, *wheelbarrow* y *bicycle*, introducidas en Cornuéjols *et al.* (1985)

para el poliedro del *Agente Viajero Gráfico* (*GTSP*, versión del *TSP* en la que se permite visitar las ciudades más de una vez), y damos condiciones suficientes bajo las cuales dichas desigualdades inducen facetas del poliedro cuyo estudio nos ocupa. Terminamos el artículo con una sección dedicada a consideraciones finales.

2. NOTACIÓN Y DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

Sea $G = (V, E)$ un grafo completo y no dirigido, en donde el conjunto de vértices, V , representa un conjunto de clientes, $\{1, \dots, n\}$, con demandas enteras conocidas, $d_i > 0$, y un vértice distinguido, $\{0\}$, al que denominaremos depósito, en el que hay localizada una flota de K vehículos idénticos de capacidad $Q \geq \max\{d_i, i \in V \setminus \{0\}\}$. Cada arista $e = (i, j)$ del conjunto de aristas, E , representa el camino entre sus extremos.

Dado $S \subseteq V$, \bar{S} denota el conjunto de vértices en $V \setminus S$ y $d(S)$ la suma de las demandas de los clientes de S . $E(S)$ representa el conjunto de aristas con los dos extremos en S y $\delta(S)$ el conjunto de aristas con un único extremo en S . Dados S y $S' \subseteq V$, (S, S') denota el conjunto de aristas con un extremo en S y el otro en S' .

Dado un subconjunto T de aristas, que puede contener en general más de una copia de una misma arista, $V(T)$ representa el conjunto de vértices que son extremos de aristas de T , y $G(T) = (V(T), T)$, el subgrafo de G inducido por las aristas de T . Definimos el vector de incidencia, x^T , asociado a T como un vector real indexado en E cuyas componentes, x_e (o x_{ij}), indican el número de veces que la arista e aparece en T . $x(T)$ indicará $\sum_{e \in T} x_e$.

Un *tour* es un camino cerrado que puede utilizar tanto aristas como vértices repetidos. Dado un subconjunto de vértices, un *ciclo Hamiltoniano* es un tour que visita exactamente una vez cada vértice del subconjunto. Salvo que se indique lo contrario supondremos que todos los vectores, x , son vectores columna. x^t , denotará el vector traspuesto. El cardinal de un conjunto W lo denotamos como $|W|$.

Dado P un poliedro en $\mathbb{R}^{|E|}$, una desigualdad $a^t x \geq a_0$ definida en $\mathbb{R}^{|E|}$ se dice que es válida para P si la cumple cualquier punto de P ; se dice que es soporte si $\{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid a^t x = a_0, x \in P\}$ es no vacío. Decimos que la desigualdad induce una faceta de P si es soporte y $\{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid a^t x = a_0, x \in P\}$ es una faceta. Tanto los resultados de teoría poliédrica como las técnicas de demostración que vamos a utilizar pueden consultarse en cualquiera de los textos clásicos, Nemhauser y Wolsey (1988) o Pulleyblank (1983).

De ahora en adelante supondremos que el número de vehículos disponible, K , es suficiente como para abastecer la demanda de todos los clientes. En el contexto de demanda compartida basta con garantizar que $K \geq \lceil \frac{d(V)}{Q} \rceil$, en donde $\lceil \frac{d(V)}{Q} \rceil$ representa el menor entero mayor que $\frac{d(V)}{Q}$. La notación que acabamos de establecer nos permite dar la siguiente definición:

Definición 1. Un conjunto de aristas, T , no necesariamente distintas, se dice que es una solución del SDVRP si es posible establecer una partición de T en K subconjuntos, T_h , de manera que, el grafo inducido por cada T_h , $G(T_h) = (V(T_h), T_h)$, es un tour que contiene al depósito y además es posible asociar con cada vértice, i , y con cada ruta, h , un valor, d_i^h , que indica la parte de la demanda de i servida por el vehículo h , de forma que:

- cada vértice en $V \setminus \{0\}$ está asignado a al menos una ruta,
- $V = \bigcup_{h=1}^K V(T_h)$,
- que el cliente i esté asignado a la ruta h no significa que $d_i^h > 0$ pero, si $i \notin V(T_h)$, entonces $d_i^h = 0$,
- $\sum_{h=1}^K d_i^h = d_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ y,
- $\sum_{i \in V(T_h)} d_i^h \leq Q \quad \forall h \in \{1, 2, \dots, K\}$.

En Belenguer *et al.* (2000) se demuestra que la envoltura convexa de los vectores de incidencia asociados a los subconjuntos de aristas, T , que cumplen la definición anterior, es un poliedro no acotado de dimensión completa. En adelante nos referiremos a él como P_{SDVRP} . En el mismo trabajo se prueba que los vectores de incidencia, x , de las soluciones del SDVRP cumplen:

- (1) $x(\delta(0)) \geq 2K$ y par
- (2) $x(\delta(i)) \geq 2$ y par $\quad \forall i \in V \setminus \{0\}$
- (3) $x(\delta(S)) \geq 2 \lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil \quad \forall S \subseteq V \setminus \{0\}, 2 \leq |S| \leq n-1$
- (4) $x_{ij} \geq 0, x_{ij}$ entero $\quad \forall (i, j) \in E$

en donde x_{ij} representa el número de veces que se utiliza la arista (i, j) en la solución. Por último, demuestran que las restricciones de grado, (1) y (2), las de capacidad, (3), y las de no negatividad, (4), inducen facetas de P_{SDVRP} .

Modificando ligeramente el valor de los términos de la derecha de las desigualdades anteriores se consiguen formulaciones de problemas de rutas más conocidos, como el *GTSP*, que hemos mencionado antes, o la versión gráfica del *CVRP*, conocida como *GVRP*, en donde sigue sin permitirse servir la demanda de un cliente utilizando más de un vehículo, pero sí se admite la posibilidad de visitarlo más de una vez. Véanse respectivamente los trabajos de Cornuéjols *et al.* (1985), y Cornuéjols y Harche (1993), en donde se presentan interesantes resultados, tanto teóricos como prácticos, que se han obtenido considerando como base para formular los problemas las desigualdades anteriores.

Es sencillo comprobar que las restricciones (1) – (4) proporcionan una relajación del SDVRP, ya que hay vectores que satisfacen todas las desigualdades y no corresponden al vector de incidencia de ninguna solución posible del problema, véase Belenguer *et al.*

(2000). Sin embargo, esta formulación ha proporcionado también buenos resultados en el campo del $SDVRP$, tanto desde el punto de vista teórico como práctico. Belenguer *et al.* (2000) resuelven óptimamente instancias de hasta 50 clientes, y Martínez *et al.* (2000) consiguen encontrar la descripción lineal completa del poliedro asociado a una instancia de 5 clientes y 2 vehículos, la única que se conoce por el momento para un problema de estas características. Creemos que estos son motivos suficientes para continuar la investigación en esta línea.

A continuación describimos brevemente la técnica que utilizaremos para demostrar algunos de los resultados que vamos a presentar, es conocida como método indirecto. Como el P_{SDVRP} es un poliedro no acotado de dimensión completa, sabemos que no hay ninguna ecuación implícita en su descripción lineal, esto nos permite afirmar (ver Nemhauser y Wolsey, 1988) lo siguiente: *Para cada faceta del P_{SDVRP} hay una única (salvo producto por un escalar no negativo) desigualdad válida que la induce. Además, para demostrar que una desigualdad $a^t x \geq a_0$ define una faceta basta con demostrar que si $f^t x \geq f_0$ es una faceta del P_{SDVRP} que cumple:*

$$\{x \in P_{SDVRP} \mid a^t x = a_0\} \subseteq \{x \in P_{SDVRP} \mid f^t x = f_0\},$$

entonces, existe un escalar λ no negativo, que cumple $f_e = \lambda a_e, \forall e \in E$ y, $f_0 = \lambda a_0$.

3. DEL P_{GTSP} AL P_{SDVRP}

En esta sección extendemos al poliedro del *Problema de Rutas de Vehículos con Demanda Compartida* algunas desigualdades que se sabe son facetas del P_{GTSP} . En las demostraciones de los resultados que vamos a presentar se utilizan, de forma implícita, las propiedades de las desigualdades válidas para el P_{SDVRP} que resumimos a continuación. Tales propiedades pueden encontrarse, junto con sus respectivas demostraciones, en Martínez (1995).

- Las desigualdades válidas para el P_{SDVRP} son de la forma:

$$\sum_{e \in E} a_e x_e \geq a_0, \text{ con } a_e \geq 0, \forall e \in E.$$

- Las únicas restricciones, $a^t x \geq a_0$, distintas de $x_e \geq 0, e \in E$, que inducen facetas del P_{SDVRP} , cumplen $a_0 > 0$.
- Si $a^t x \geq a_0$ induce una faceta de P_{SDVRP} , entonces, o es una desigualdad trivial, i.e. $x_e \geq 0, \forall e \in E$, o sus coeficientes satisfacen la desigualdad triangular.
- Si $a^t x \geq a_0$ es una desigualdad válida para el P_{SDVRP} y sus coeficientes cumplen la desigualdad triangular entonces, para cualquier arista $e \in E$ existe una solución T del $SDVRP$, que utiliza la arista e y cuyo vector de incidencia cumple $a^t x = a_0$.

De las definiciones del *GTSP*, Cornuéjols *et al.* (1985), el *GVRP*, Cornuéjols y Harche (1993) y la del *SDVRP*, se deduce fácilmente que la relación existente entre sus poliedros es $P_{GVRP} \subseteq P_{SDVRP} \subseteq P_{GTSP}$, por lo tanto, cualquier desigualdad válida para el *GTSP* también lo será para el *SDVRP*. Es evidente que esto no implica que se herede también la propiedad de ser faceta, de hecho, hasta ahora no se conoce ningún resultado general que permita establecer una relación entre las facetas de dichos poliedros. Solamente se conocen resultados parciales, como por ejemplo, que bajo distintas condiciones, las desigualdades (1)-(4), adaptadas convenientemente a cada problema, inducen facetas en los tres casos.

Las desigualdades que estudiamos aquí están asociadas a estructuras más complejas. Se trata de las definidas a partir de las *configuraciones path*, *wheelbarrow* y *bicycle* introducidas en Cornuéjols *et al.* (1985) para el poliedro de soluciones del *GTSP*. Más tarde, Cornuéjols y Harche (1993) demuestran que bajo determinadas condiciones las restricciones asociadas también inducen facetas del poliedro del *GVRP*. La relación existente entre estos poliedros y el *PSDVRP* invita a pensar que estas desigualdades también inducirán, como veremos, facetas del mismo. Tanto la notación como las definiciones que damos a continuación han sido adoptadas del trabajo de Cornuéjols *et al.* (1985). Notar, no obstante, que nosotros trabajamos sobre un grafo completo.

Dado $G = (V, E)$ un grafo completo no dirigido, a la estructura de la figura 1 se la denomina *configuración path*, en donde, s es un entero, $s \geq 3$ e impar y $\{A, Z, B_j^i, i = 1, \dots, s, j = 1, \dots, n_i\}$, con $n_i \in \mathbb{N}$, $n_i \geq 2$, $\forall i = 1, 2, \dots, s$, una partición del conjunto de vértices, V , en subconjuntos no vacíos.

Se define la *desigualdad*, $a'x \geq a_0$, asociada a una *configuración path* como aquella cuyos coeficientes son:

$$a_e = \begin{cases} 1 & \text{para } e \in (A, Z) \\ \frac{|j-p|}{n_i-1} & \text{para } e \in (B_j^i, B_p^i), j \neq p \\ & \text{y } |j-p| \leq n_i, i = 1, \dots, s \\ \max \left\{ \frac{p}{n_r-1} - \frac{j-2}{n_i-1}, \frac{j}{n_i-1} - \frac{p-2}{n_r-1} \right\} & \text{para } e \in (B_j^i, B_p^r), i \neq r \\ & j = 1, \dots, n_i, p = 1, \dots, n_r \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y el término independiente es:

$$a_0 = 1 + \sum_{i=1}^s \frac{n_i + 1}{n_i - 1}.$$

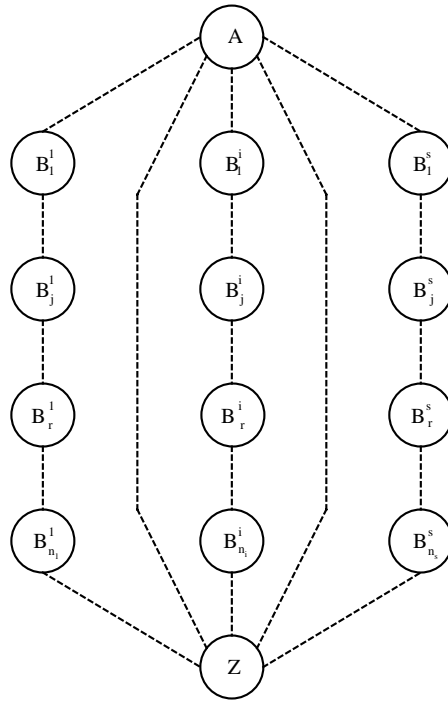


Figura 1. Configuración *path*.

Si $Z = \emptyset$, la configuración resultante se denomina *configuración wheelbarrow*. Si tanto A como Z son vacíos la configuración se denomina *configuración bicycle*. Análogamente se definen las desigualdades asociadas.

Por convenio, $A = B_0^i$, $Z = B_{n_i+1}^i$, $i = 1, \dots, s$ y $B_{n_s+1}^{s+1} = B_{n_1}^1$. Esperamos que esta notación aporte claridad a las demostraciones. Por el mismo motivo, $P_i = \bigcup_{j=1}^{n_i} B_j^i$, $i = 1, \dots, s$, representará el conjunto de vértices de cada uno de los s caminos que hay en la configuración uniendo A con Z .

Evidentemente, las desigualdades *path* son válidas para el P_{SDVRP} ya que lo son para el P_{GTSP} , Cornuéjols *et al.* (1985). La cuestión que nos planteamos aquí es averiguar si también definen facetas. En ese sentido, es evidente que bajo las condiciones establecidas por Cornuéjols y Harche (1993) para garantizar que dichas restricciones inducen facetas del P_{GVRP} , podemos afirmar que también lo son del P_{SDVRP} , ya que cualquier solución posible del $GVRP$ lo es del $SDVRP$.

Sin embargo, tales condiciones son difíciles de comprobar, pues implican averiguar el número de vehículos necesario para garantizar la existencia de ciertas particiones

de los clientes, particiones que a su vez deben cumplir una serie de condiciones muy concretas dirigidas a garantizar la existencia de ciertos tipos de soluciones. De hecho, para averiguar dicho número de vehículos es necesario resolver previamente distintos problemas de *Bin-Packing*.

La idea en este trabajo es explotar la ventaja que supone compartir la demanda para extender al P_{SDVRP} los resultados propuestos en Cornuéjols *et al.* (1985) para el P_{GTSP} . Se trata de derivar condiciones, sencillas de comprobar, que sigan garantizando que las desigualdades *path* inducen facetas del P_{SDVRP} , sin necesidad de recurrir a la resolución de problemas tipo *Bin-Packing* para poder verificarlas.

Teorema 1. *Dados K vehículos de capacidad Q , si $0 \in A$ (o si $0 \in Z$), y se cumplen las condiciones siguientes:*

$$i.- \quad K \geq \frac{s-1}{2},$$

$$ii.- \quad Q \geq d(P_s) + d(P_{s-1}) + d(P_{s-2}), \text{ siendo } d(P_1) \leq d(P_2) \leq \dots \leq d(P_s), \text{ y}$$

$$iii.- \quad Q \geq 2 \left\lceil \frac{d(Z) + \sum_{i=1}^s d(P_i)}{s-1} \right\rceil$$

entonces, las desigualdades «path» inducen facetas de P_{SDVRP} .

Demostración

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que el depósito está en A . Observar que como A y Z juegan papeles equivalentes en las configuraciones *path*, cualquier resultado obtenido para uno de ellos es válido para el otro.

Ya sabemos que cualquier desigualdad, $a^t x \geq a_0$, asociada a una configuración *path* es válida para el P_{SDVRP} . Demostraremos que es soporte comprobando que las soluciones que vamos a construir pertenecen a la cara inducida por la desigualdad. Obsérvese también que añadiendo dos copias extras de cualquiera de las aristas con coeficiente estrictamente positivo en a , obtenemos una solución que cumple la desigualdad con mayor estricto, lo cuál demuestra que $a^t x \geq a_0$ es una desigualdad propia.

En primer lugar asociaremos a cada uno de los subconjuntos de la partición que define la configuración *path* un vértice que utilizaremos como su *representante*. El representante de A será el depósito, al que nos referiremos como $b_0^i = 0$, $i = 1, \dots, s$. Para cada B_j^i , con $i = 1, \dots, s$, y $j = 1, \dots, n_i$, elegiremos como representante un $b_j^i \in B_j^i$, y finalmente, tomaremos $z = b_{n_i+1}^i$, $i = 1, \dots, s$ como representante de Z .

A continuación definiremos las soluciones que nos van a permitir demostrar el resultado utilizando la técnica conocida como método indirecto. Para cada $i = 1, \dots, s$ construi-

mos la solución T^i , que diremos asociada al camino P_i , tomando:

- $2K$ copias de cada arista $(0, v)$, con $v \in A$ i.e., $x_{0v} = 2K$. Esto garantiza que todos los vehículos visitan a todos los vértices de A , ya que es posible asignar a cada uno de ellos dos de las aristas incidentes con v .
- Añadir $\frac{s-1}{2}$ copias de cada una de las aristas, e , de un ciclo Hamiltoniano, C en Z . Garantizamos así que cada vértice de Z es visitado por $\frac{s-1}{2}$ vehículos distintos, basta con asignar una arista a cada uno de ellos.
- Completamos la solución tomando $x_e = 1$, $\forall e = (b_j^r, b_{j+1}^r)$, $j = 0, \dots, n_r$ y $r = 1, \dots, s$, $r \neq i$. De este modo tenemos la seguridad de que para cada P_r ($r \neq i$) hay un camino desde el depósito b_0^r hasta z que solamente utiliza aristas consecutivas de $E(P_r)$.
- Añadiendo $x_{b_j^r v} = 2$, $\forall v \in B_j^r$, $j = 1, \dots, n_r$, $r = 1, \dots, s$, estamos seguros de que visitamos todos los vértices de B_j^r utilizando el único vehículo que entrará en el subconjunto.

En la figura 2 se ilustra parcialmente la estructura de la solución que estamos construyendo.

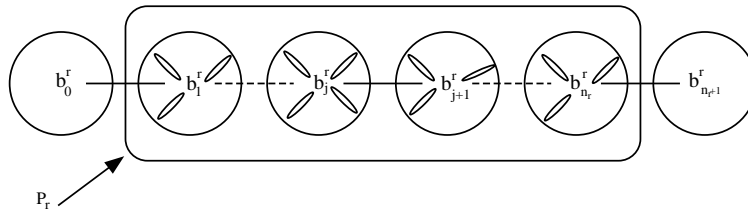


Figura 2. Vista parcial de T^i incluyendo el camino P_r .

- Notar que todos los caminos tienen como vértices extremos a 0 y a z , esto nos permite definir $\frac{s-1}{2} - 1$ tours distintos emparejando los caminos P_r , $r = 1, \dots, s$, $r \neq i$, de dos en dos. La hipótesis $K \geq \frac{s-1}{2}$ garantiza que es posible asignar un vehículo distinto a cada uno de estos tours. Además, cada uno de estos vehículos puede servir completamente la demanda de los clientes que visita a lo largo de los dos caminos que lo forman sin exceder su capacidad; recordar que por hipótesis, $Q \geq d(P_s) + d(P_{s-1}) + d(P_{s-2})$, lo cual significa que la demanda de dos, e incluso tres, P_r cualesquiera puede abastecerse completamente utilizando un único vehículo.
- Para terminar, tomamos 2 copias de cada una de las aristas (b_j^i, b_{j+1}^i) , $j = 1, \dots, n_i$, que junto con el tour que nos quedaba por asignar en el apartado anterior proporciona una nueva ruta que asignamos al vehículo que seguro todavía nos queda, recordar que por hipótesis $K \geq \frac{s-1}{2}$. Este vehículo abastecerá completamente la demanda de los tres caminos que lo forman más parte de la demanda de A y de la de Z si fuese necesario. Notar que la arista (b_0^i, b_1^i) no se utiliza.

En total hemos construido $\frac{s-1}{2}$ rutas en $V \setminus A$. Obsérvese que entre todos los vehículos asignados a estas rutas pueden servirse $Q \frac{s-1}{2}$ unidades de demanda, lo que garantiza, gracias a la hipótesis, $Q \geq 2 \lceil \frac{d(Z) + \sum_{i=1}^s d(P_i)}{s-1} \rceil$, que entre todos ellos es posible abastecer toda la demanda de Z , pues todos estos vehículos entran en Z y visitan a todos sus clientes. Además, el hecho de que los K vehículos disponibles visiten a todos los clientes de A garantiza la existencia de una asignación adecuada de las demandas a los vehículos de forma que se cumplan todas las condiciones establecidas en la definición 1. Por lo tanto, la solución que acabamos de construir es una solución posible del *SDVRP*, y como el procedimiento constructivo que hemos utilizado es independiente del P_i elegido, podemos obtener hasta s soluciones distintas. La figura 3 corresponde a T^1 .

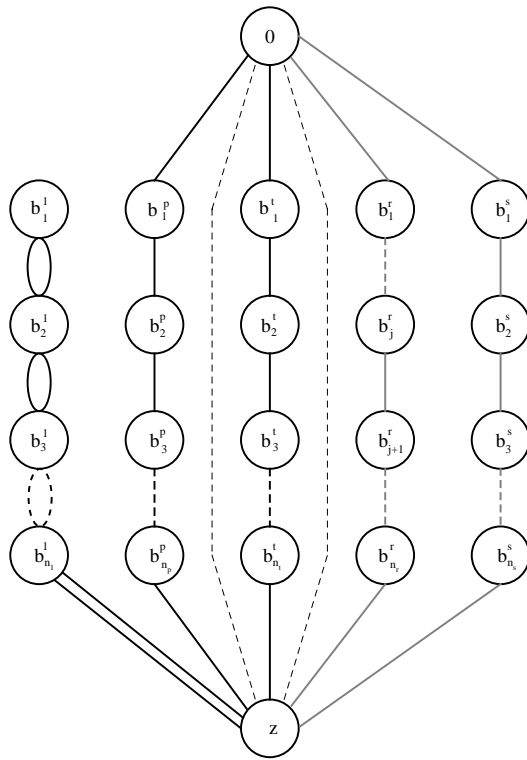


Figura 3. Solución asociada a P_1 .

Nótese que, precisamente, el hecho de permitir atender la demanda de un cliente utilizando varios vehículos, es lo que garantiza que las soluciones construidas a lo largo de todo el artículo sean soluciones posibles para el *SDVRP*, pero no necesariamente del

GVRP. Pensemos por ejemplo en el caso en que Z es un único cliente. Las soluciones consideradas solamente serán soluciones posibles del *GVRP* cuando la capacidad residual de, al menos uno de los vehículos que visitan a Z , es suficiente para servirlo completamente. Además, hemos de tener en cuenta que dicho vehículo debe servir también la demanda de los caminos P_i asignados a su ruta; sin duda alguna ésta es una condición más fuerte que la que nosotros hemos establecido.

Veamos a continuación que las soluciones que hemos construido pertenecen a la cara inducida por la desigualdad *path*. Obsérvese que en cada $P_r \neq P_i$, utilizamos $n_r + 1$ aristas de coeficiente $\frac{1}{n_r-1}$ y en cada P_i , $2n_i$ aristas de coeficiente $\frac{1}{n_i-1}$, luego:

$$a^t x^{T^i} = \sum_{r=1, r \neq i}^s \frac{n_r+1}{n_r-1} + \frac{2n_i}{n_i-1} = \sum_{r=1, r \neq i}^s \frac{n_r+1}{n_r-1} + \frac{n_i+1+n_i-1}{n_i-1} =$$

$$1 + \sum_{r=1}^s \frac{n_r+1}{n_r-1} = a_0.$$

Supongamos que existe una desigualdad $f^t x \geq a_0$ que induce una faceta de P_{SDVVRP} cumpliendo, $\{x \in P_{SDVVRP} \mid a^t x = a_0\} \subseteq \{x \in P_{SDVVRP} \mid f^t x = a_0\}$, entonces, utilizando las soluciones que acabamos de construir, comprobaremos que $f_e = a_e$, $\forall e \in E$, con lo que daremos por demostrado el resultado.

1. $f_e = a_e = 0$, $\forall e \in E(B_j^i)$, $i = 1, \dots, s$, $j = 0, \dots, n_i + 1$. Dada una solución T^i de las construidas, añadiendo 2 copias de la arista e elegida se obtiene una nueva solución T' , que cumple $a^t x^{T'} = a_0$, lo cual implica que $f^t x^{T'} = a_0$, y como $f^t x^{T'} = f^t x^{T^i} + 2f_e$, con $f^t x^{T^i} = a_0$, f_e ha de ser necesariamente igual a 0.
2. $f_e = f_{b_j^r b_{j+1}^r}$, $\forall e \in (B_j^r, B_{j+1}^r)$, $r = 1, \dots, s$, $j = 0, \dots, n_r$. Dada una arista $e = (u, v)$ cualquiera de la cortadura (B_j^r, B_{j+1}^r) es fácil construir a partir de T^i , con $i \neq r$, una nueva solución T' que utilice la arista e y que cumpla $f^t x^{T'} = a_0$. Basta con sustituir las aristas (u, b_j^r) , (b_j^r, b_{j+1}^r) y (b_{j+1}^r, v) , que como sabemos forman parte de T^i , por la nueva arista (u, v) , es decir, $T' = T^i - (u, b_j^r) - (b_j^r, b_{j+1}^r) - (b_{j+1}^r, v) + (u, v)$. Evidentemente, $a^t x^{T'} = a_0$ ya que los coeficientes en a de las aristas (u, b_j^r) y (b_{j+1}^r, v) son cero y $a_{uv} = \frac{1}{n_r-1} = a_{b_j^r b_{j+1}^r}$. Consecuentemente, $f^t x^{T'} = a_0$, y por tanto:

$$f^t x^{T'} = f^t x^{T^i} - f_{ub_j^r} - f_{b_j^r b_{j+1}^r} - f_{b_{j+1}^r v} + f_{uv} = a_0,$$

$$f^t x^{T^i} = a_0.$$

Restando respectivamente los términos de la derecha y de la izquierda de las dos ecuaciones anteriores, y teniendo en cuenta que por lo visto en el punto (1), $f_{ub_j^r} = f_{b_{j+1}^r v} = 0$, tenemos, $-f_{b_j^r b_{j+1}^r} + f_{uv} = 0$, lo que demuestra el resultado i.e.,

$$f_{uv} = f_{b_j^r b_{j+1}^r}, \forall (u, v) \in (B_j^r, B_{j+1}^r).$$

La demostración es independiente de la cortadura elegida, lo único importante es elegir adecuadamente la solución T^i , por lo tanto será cierto para cualquiera de ellas.

3. $f_e = a_e, \forall e \in (B_j^i, B_{j+1}^i), i = 1, \dots, s, j = 0, \dots, n_i$. En primer lugar demostraremos que todas las aristas de cualquiera de las cortaduras definidas por dos subconjuntos consecutivos en un mismo P_i tienen el mismo coeficiente, al que denominaremos π_i . Es decir, dado un $i = 1, \dots, s$, queremos ver que $f_e = f_{e'} \forall e \in (B_j^i, B_{j+1}^i)$ y $\forall e' \in (B_k^i, B_{k+1}^i)$ siendo j y k dos índices distintos de $\{0, \dots, n_i\}$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $j = 0$ y que $k = 1$ i.e., que $e \in (B_0^i, B_1^i)$ y $e' \in (B_1^i, B_2^i)$. Si no fuese así modificaríamos adecuadamente la solución T^i para que no contuviese ninguna copia de la arista e . A partir de T^i construimos T' eliminando las dos copias que hay de la arista e' y añadiendo dos copias de e , de esta forma, $f^t x^{T'} = a_0$, y por tanto, $f^t x^{T'} = a_0$ (ver figura 4).

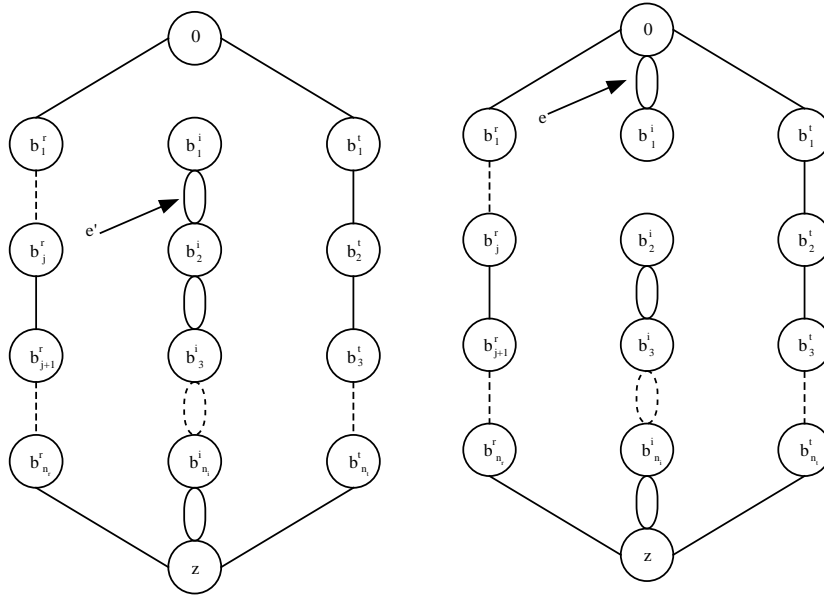


Figura 4. Rutas de T^i y T' que contienen a e' y a e , respectivamente.

Luego,

$$\left. \begin{array}{l} f^t x^{T^i} = a_0 \\ f^t x^{T'} = a_0 \end{array} \right\} \rightarrow f^t x^{T^i} - f^t x^{T'} = f^t x^{T^i} - f^t x^{T^i} + 2f_{e'} - 2f_e = 0 \rightarrow f_{e'} = f_e$$

Como $f^t x^{T^i} = a_0$ para cualquier i , sustituyendo todas las soluciones en la ecuación obtenemos el siguiente sistema de s ecuaciones con s incógnitas π_1, \dots, π_s :

$$\begin{aligned}
2n_1\pi_1 + (n_2 + 1)\pi_2 + \dots + (n_{s-1} + 1)\pi_{s-1} + (n_s + 1)\pi_s &= a_0 \\
(n_1 + 1)\pi_1 + 2n_2\pi_2 + \dots + (n_{s-1} + 1)\pi_{s-1} + (n_s + 1)\pi_s &= a_0 \\
&\vdots \\
(n_1 + 1)\pi_1 + \dots + (n_{i-1} + 1)\pi_{n_{i-1}} + 2n_i\pi_i + \\
&\quad (n_{i+1} + 1)\pi_{n_{i+1}} + \dots + (n_s + 1)\pi_s = a_0 \\
&\vdots \\
(n_1 + 1)\pi_1 + \dots + (n_i + 1)\pi_{n_i} + \dots + 2n_s\pi_s &= a_0
\end{aligned}$$

cuya única solución es:

$$\pi_i = \frac{1}{n_i - 1}, \quad i = 1, \dots, s,$$

lo que finalmente demuestra que $f_e = a_e, \forall e \in (B_j^i, B_{j+1}^i), i = 1, \dots, s$ y $j = 0, \dots, n_i$.

4. $f_e = a_e, \forall e \in (B_j^i, B_p^i)$ con $p \geq j + 2$ e $i = 1, \dots, s$. Observar que no hay pérdida de generalidad en suponer que $j \geq 1$. Si no lo fuese modificaríamos adecuadamente la solución T^i para que la siguiente operación tuviese sentido (véase la figura 5),

$$T' = T^i - \sum_{r=0}^{p-j-1} (b_{j+r}^i, b_{j+r+1}^i) + (b_j^i, b_p^i).$$

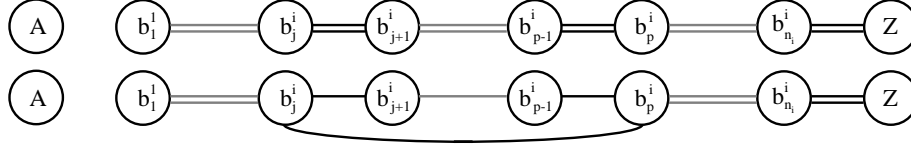


Figura 5. Construcción de T' , para probar que $f_e = a_e, \forall e \in (B_j^i, B_p^i)$ con $p \geq j + 2$.

Es fácil comprobar que $a^t x^{T'} = a_0$, y por tanto $f^t x^{T'} = a_0$, es decir:

$$f^t x^{T'} = f^t x^{T^i} - \sum_{r=0}^{p-j-1} \frac{1}{n_i - 1} + f_{b_j^i, b_p^i} = a_0.$$

Luego, $-\frac{p-j}{n_i-1} + f_{b_j^i, b_p^i} = 0$ y entonces, $f_{b_j^i, b_p^i} = \frac{p-j}{n_i-1}$, lo cual demuestra el resultado enunciado.

5. $f_e = a_e, \forall e \in (B_j^i, B_p^r), i \neq r, 1 \leq j \leq n_i$ y $1 \leq p \leq n_r$. Para demostrarlo construiremos una solución T^i que cumplirá la restricción $a^t x \geq a_0$ con igualdad y cuyas aristas

coinciden con las que se utilizan en T^i excepto las aristas de los caminos P_i y P_r . En su lugar tomaremos,

$$\begin{aligned} x_{b_j^i b_p^r} &= 1, \\ x_{b_d^i b_{d+1}^i} &= 1, \quad d = 0, \dots, j-1, \\ x_{b_d^r b_{d+1}^r} &= 2, \quad d = 0, \dots, p-2, \\ x_{b_{j+d}^i b_{j+d+1}^i} &= 2, \quad d = 1, \dots, n_i - j, \\ x_{b_{p+d}^r b_{p+d+1}^r} &= 1, \quad d = 0, \dots, n_r - p. \end{aligned}$$

En la figura 6 puede verse la parte de T' que difiere de T^i .

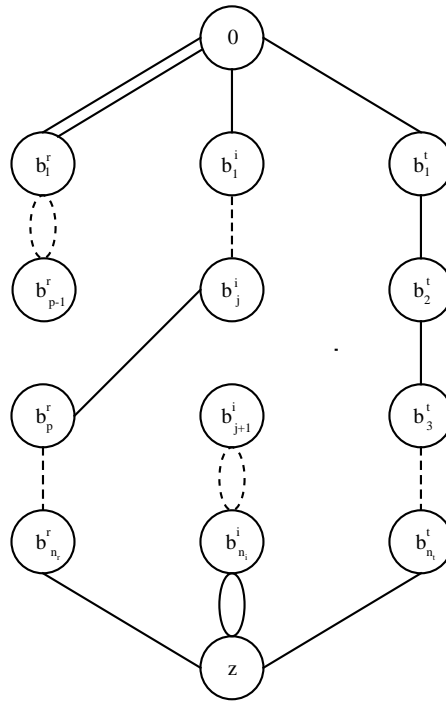


Figura 6. Vista parcial de la solución T' .

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que:

$$a_e = \max \left\{ \frac{p}{n_r - 1} - \frac{j-2}{n_i - 1}, \frac{j}{n_i - 1} - \frac{p-2}{n_r - 1} \right\} = \frac{j}{n_i - 1} - \frac{p-2}{n_r - 1},$$

lo cual nos permite comprobar que efectivamente T^l satisface,

$$\begin{aligned}
 a^t x^{T^l} &= \\
 \sum_{q \neq i, q \neq r} \frac{n_q+1}{n_q-1} + \frac{j}{n_i-1} + \frac{j}{n_i-1} - \frac{p-2}{n_r-1} + 2 \frac{p-1}{n_r-1} + \frac{n_r+1-p}{n_r-1} + 2 \frac{n_i-j}{n_i-1} &= \\
 \sum_{q \neq i, q \neq r} \frac{n_q+1}{n_q-1} + \frac{j+j+2n_i-2j}{n_i-1} + \frac{-p+2+2p-2+n_r+1-p}{n_r-1} &= \\
 \sum_{q \neq i, q \neq r} \frac{n_q+1}{n_q-1} + \frac{n_i+1+n_i-1}{n_i-1} + \frac{n_r+1}{n_r-1} = \sum_{q=1}^s \frac{n_q+1}{n_q-1} + \frac{n_i-1}{n_i-1} &= \\
 1 + \sum_{q=1}^s \frac{n_q+1}{n_q-1} = a_0, &
 \end{aligned}$$

y por tanto, $f^t x^{T^l} = a_0$. De donde, $f^t x^{T^i} - f^t x^{T^l} = 0$ y, consecuentemente,

$$\begin{aligned}
 f^t x^{T^i} - f^t x^{T^l} &= \frac{2n_i}{n_i-1} + \frac{n_r+1}{n_r-1} - \left[\frac{j}{n_i-1} + 2 \frac{n_i-j}{n_i-1} + f_e + 2 \frac{p-1}{n_r-1} + \frac{n_r+1-p}{n_r-1} \right] \\
 &\downarrow \\
 f_e &= \frac{2n_i-j-2n_i+2j}{n_i-1} + \frac{n_r+1-2p+2-n_r-1+p}{n_r-1} = \frac{j}{n_i-1} - \frac{p-2}{n_r-1} = a_e.
 \end{aligned}$$

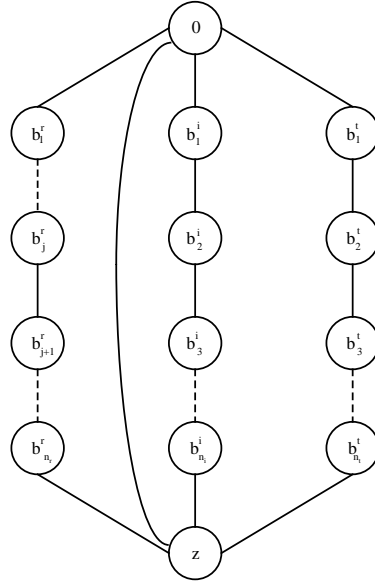


Figura 7. Vista parcial de la solución T^l utilizada para calcular $f_e, \forall e \in (A, Z)$.

6. $f_e = 1, \forall e \in (A, Z)$. El resultado se obtiene directamente comparando una cualquiera de las soluciones T^i con la solución T' dada en la figura 7, y que se obtiene a partir de ella de la siguiente forma:

$$T' = T^i - \sum_{r=1}^{n_i} (b_r^i, b_{r+1}^i) + (b_0^i, b_1^i) + (0, z).$$

Evidentemente, $a^t x^{T'} = \frac{n_i+1}{n_i-1} + 1 + \sum_{r \neq i} \frac{n_r+1}{n_r-1} = a_0$, lo que implica,

$$f^t x^{T^i} - f^t x^{T'} = 0 \longrightarrow \frac{2n_i}{n_i-1} - \frac{n_i+1}{n_i-1} - f_e = 0,$$

y por tanto:

$$f_e = \frac{2n_i - n_i - 1}{n_i - 1} = \frac{n_i - 1}{n_i - 1} = 1 = a_e.$$

Hemos visto que $a_e = f_e$ para cualquier arista $e \in E$, lo que demuestra que las desigualdades *path* inducen facetas del P_{SDVRP} . □

En el apéndice adjunto demostramos que las condiciones (i) y (ii) son suficientes para garantizar que las desigualdades *wheelbarrow* inducen facetas del P_{SDVRP} . La técnica de demostración es la misma que la utilizada para probar el resultado anterior.

Como ya hemos señalado, las condiciones establecidas en el teorema 1 son sencillas de comprobar, no requieren la resolución de problemas tipo *Bin-Packing* y, en ciertos casos, son menos fuertes que las exigidas en Cornuéjols y Harche (1993). Evidentemente, si en una instancia concreta, en la que se ha fijado el número de vehículos y la capacidad de los mismos, se cumplen las condiciones de Cornuéjols y Harche (1993), también se cumplirán las establecidas en el teorema anterior. El siguiente ejemplo, con el que concluimos esta cuestión, muestra que el recíproco no es cierto:

Ejemplo: Dada la instancia del $SDVRP$ en la que hay dos vehículos de demanda igual a 16, y 11 clientes cuyas demandas son, $d_1 = d_2 = 5, d_i = 1, i = 3, \dots, 10$, y $d_{11} = 14$, si definimos:

$$\begin{aligned} A &= \{0\}; & Z &= \{11\}; & P_1 &= \{1, 2\}, & (B_{1_1} = 1, B_{1_2} = 2); \\ P_2 &= \{3, 4\}, & (B_{2_1} = 3, B_{2_2} = 4); & P_3 &= \{5, 6\}, & (B_{3_1} = 5, B_{3_2} = 6); \\ P_4 &= \{7, 8\}, & (B_{4_1} = 7, B_{4_2} = 8); & P_5 &= \{9, 10\}, & (B_{5_1} = 9, B_{5_2} = 10), \end{aligned}$$

es evidente que la desigualdad asociada a esta configuración *path* induce una faceta del P_{SDVRP} , ya que se cumplen las condiciones establecidas en el enunciado del teorema. Sin embargo, no podemos decir lo mismo cuando nos referimos al P_{GVRP} asociado. En

este caso es sencillo comprobar que no existe ninguna partición del conjunto de clientes en 2 subconjuntos tales que se cumplan las condiciones establecidas en Cornuéjols y Harche (1993).

Llegado este punto queda por analizar qué pasa cuando el depósito pertenece a cualquier otro subconjunto de la partición, i.e., cuando $0 \in B_j^i$ con $i = 1, \dots, s$ y $j = 1, \dots, n_i$. Cornuéjols y Harche (1993) distinguen claramente dos situaciones, dependiendo de si el número de vehículos que se necesita para servir la demanda de $V \setminus B_j^i$ es o no superior a uno. Nosotros distinguiremos también la misma casuística.

Teorema 2. Si $0 \in B_j^i$, con, $i = 1, \dots, s$, $j = 1, \dots, n_i$, y $d(V \setminus B_j^i) \leq Q$, entonces, las desigualdades «path», «wheelbarrow» y «bicycle» inducen facetas del P_{SDVRP} .

Demostración

Este resultado se deduce directamente de los teoremas 3.2 y 3.4 de Cornuéjols *et al.* (1985), y del teorema 2.6 de Naddef y Rinaldi (1991), que establecen, respectivamente, que dichas desigualdades inducen facetas del P_{GTSP} . Basta con tener en cuenta que bajo la hipótesis establecida cualquier solución del $GTSP$ puede extenderse a una solución del $SDVRP$ añadiendo, únicamente, aristas con coeficiente nulo en la desigualdad.

Veámoslo, sea $C_{B_j^i}$ un ciclo Hamiltoniano en B_j^i y K el número de vehículos disponible para abastecer la demanda de $V \setminus \{0\}$. Evidentemente, cualquier tour asociado a una solución del $GTSP$ recorrerá todos los vértices del grafo, si añadimos a este tour $K - 1$ copias de cada una de las aristas de $C_{B_j^i}$ obtendremos un tour en el que K vehículos visitan todos los vértices de B_j^i , y solamente uno de ellos visitará a los vértices del complementario. Por hipótesis, sabemos que se necesita un único vehículo para abastecer la demanda de $V \setminus B_j^i$, luego seguro que hay una asignación posible de demandas de clientes a vehículos de manera que el conjunto de aristas que acabamos de dar define una solución del $SDVRP$. Obsérvese que las únicas aristas añadidas son aristas de $E(B_j^i)$, como el coeficiente de estas aristas es igual a cero, si la solución del $GTSP$ de la que partíamos pertenecía a la cara del P_{GTSP} inducida por $a^t x \geq a_0$, la solución del $SDVRP$ que hemos construido pertenecerá también a la cara del P_{SDVRP} inducida por la misma desigualdad. □

Hasta aquí los resultados que nos han permitido extender facetas del P_{GTSP} a facetas del P_{SDVRP} . Como demostramos a continuación, cuando el número de vehículos necesario para servir la demanda de $V \setminus B_1^i$ es superior a uno el tipo de conclusiones a las que se llega no es tan satisfactorio. En el caso de necesitar al menos tres, concluimos que las desigualdades *path* no son ni tan siquiera soporte. Lo que ocurre en este caso en relación con las desigualdades *wheelbarrow* o *bicycle* es, por el momento, un tema abierto.

Proposición 1. Si el depósito pertenece a B_1^i , para algún $i = 1, \dots, s$, y el número de vehículos necesario para servir la demanda de los vértices de $V \setminus B_1^i$ es al menos tres, las desigualdades «path» no son soporte del P_{SDVRP} .

Demostración

Sea $a^t x \geq a_0$ una desigualdad asociada a una configuración *path*. Supongamos que T es una solución del $SDVRP$ cuyo vector de incidencia minimiza el término de la izquierda de la restricción y veamos que con las hipótesis establecidas esto implica, $a^t x^T > a_0$.

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que las únicas aristas de T incidentes con B_1^i son aristas de $(A, B_1^i) \cup (B_1^i, B_2^i)$. Si no fuera así, aplicando un número finito de veces el procedimiento que describimos a continuación obtendríamos una solución T' que cumpliría la condición y seguiría minimizando $a^t x$.

Si en T hay una arista $e \in (B_1^i, B_j^i)$, con $3 \leq j \leq n_i + 1$, sustituyendo cada una de las copias de $e = (u, v)$ por el camino $u - b_2^i - \dots - b_r^i - b_{r+1}^i - \dots - b_{j-1}^i - v$, obtenemos una nueva solución T' , que cumple $a^t x^T = a^t x^{T'}$, y no contiene a e .

Análogamente, si $e \in (B_1^i, B_p^r)$, $r \neq i$, $p \geq 1$, sustituyéndola por la arista (u, b_0^i) y el camino $b_0^i = b_0^r - b_1^r - \dots - b_j^r - \dots - b_{p-1}^r - v$, obtenemos una solución T' , que cumple $a^t x^T \geq a^t x^{T'}$. Basta con observar que la contribución al término izquierdo de la desigualdad de la nueva arista y del camino es $\frac{1}{n_i-1} + \frac{p}{n_r-1}$, y que,

$$a_e \geq \frac{p}{n_r-1} - \frac{1-2}{n_i-1} = \frac{1}{n_i-1} + \frac{p}{n_r-1}.$$

Sea $\bar{k} = \lceil \frac{d(V \setminus B_1^i)}{Q} \rceil$ el número de vehículos que necesitamos para servir la demanda de $V \setminus B_1^i$. Como el depósito pertenece a B_1^i , la cortadura (B_1^i, \bar{B}_1^i) se atravesará al menos $2\bar{k}$ veces utilizando, como hemos visto, solamente aristas de $(A, B_1^i) \cup (B_1^i, B_2^i)$. Estas aristas se distribuirán, si nos olvidamos de cuál es la cortadura concreta, siguiendo uno de los patrones siguientes:

Cortadura 1	Cortadura 2	Eliminando	Quedan
$2\bar{k}$	0	$(2\bar{k} - 2, 0)$	$(2, 0)$
$2\bar{k} - 1$	1	$(2\bar{k} - 2, 0)$	$(1, 1)$
$2\bar{k} - 2$	2	$(2\bar{k} - 4, 0)$	$(2, 2)$
$2\bar{k} - 3$	3	$(2\bar{k} - 4, 2)$	$(1, 1)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
\bar{k}	\bar{k}	Si \bar{k} es par $(\bar{k} - 2, \bar{k} - 2)$ Si \bar{k} es impar $(\bar{k} - 1, \bar{k} - 1)$	$(2, 2)$ $(1, 1)$

Observar que a partir de una solución cualquiera del *SDVRP* en la que una arista e aparece más de dos veces, siempre podemos conseguir una solución del *GTSP* en la que dicha arista se utiliza, a lo sumo, dos veces. Basta con eliminar un número adecuado de copias de la misma, a saber, $2p$ copias, si hubiese $2p + 1$, con $p \geq 1$, o $2(p - 1)$, si hubiese $2p$, con $p \geq 2$. Por lo tanto, para un \bar{k} fijo, siempre es posible eliminar al menos $2(\bar{k} - 2)$ aristas de la cortadura (B_1^i, \bar{B}_1^i) de manera que se sigue teniendo un tour, T' , que recorre todos y cada uno de los vértices de V . Este tour es una solución del *GTSP* y por tanto,

$$a^t x^{T'} = a^t x^T - \frac{2(\bar{k} - 2)}{n_i - 1} \geq a_0,$$

por ser las desigualdades asociadas a las configuraciones *path* válidas para el *GTSP*, Cornuéjols *et al.* (1985). Despejando obtenemos el resultado que buscábamos,

$$a^t x^T \geq a_0 + \frac{2(\bar{k} - 2)}{n_i - 1} > a_0.$$

Obsérvese que la hipótesis $\bar{k} \geq 3$ garantiza que $2(\bar{k} - 2) \geq 2$, y consecuentemente también, $\frac{2(\bar{k} - 2)}{n_i - 1} \geq \frac{2}{n_i - 1} > 0$. □

El único resultado conocido por el momento para el caso en que el número de vehículos que se necesita para servir $d(V \setminus B_1^i)$ es dos, es el siguiente:

Proposición 2. *Si el depósito pertenece a B_1^i para algún $i = 1, \dots, s$ y el número de vehículos necesario para abastecer la demanda de $V \setminus B_1^i$ es exactamente 2, entonces, en cualquier solución del *SDVRP* cuyo vector de incidencia pertenezca a la cara inducida por una desigualdad «*path*», la demanda de $V \setminus P_i$ debe servirse utilizando un único vehículo, i.e., la cortadura (P_i, \bar{P}_i) solamente se atraviesa dos veces.*

La demostración puede consultarse con todo detalle en Martínez (1995).

Con la proposición que presentamos a continuación damos por terminado el estudio de las relaciones poliédricas entre el *GTSP* y el *SDVRP*.

Proposición 3. *Las desigualdades asociadas a configuraciones «*bicycle*» con $s = 3$ y $n_i = 2, \forall i = 1, \dots, s$ (conocidas como «*bicycle 2-regulares*») están dominadas por $a^t x \geq a_0 + 2$, si $\lceil \frac{d(V \setminus P_i)}{Q} \rceil = 2$, siendo P_i el camino que contiene el subconjunto B_j^i al que pertenece el depósito.*

Demostración

Supongamos que el depósito pertenece a B_j^i , como para servir la demanda de $V \setminus P_i$ necesitamos dos vehículos, la cortadura (P_i, \bar{P}_i) será atravesada al menos dos veces por dos vehículos distintos. Por lo tanto, en cualquier solución T del *SDVRP* debe haber al menos cuatro aristas que pertenezcan a dicha cortadura.

Consideremos el grafo inducido por las aristas de T , teniendo en cuenta el resultado básico de teoría de grafos que establece,

«el doble del número de aristas de un grafo es igual a la suma de los grados de sus vértices»

deducimos que en T habrá al menos 7 aristas. Observar que el grado del subconjunto que contiene al depósito es al menos cuatro y el de los otros cinco subconjuntos que completan la configuración es al menos dos.

Teniendo en cuenta que cuatro de estas aristas deben pertenecer a la cortadura (P_i, \bar{P}_i) , y que el coeficiente en a de las mismas es al menos dos, tenemos,

$$\sum_{e \in T \cap \delta(P_i)} a_e x_e^T \geq 8.$$

Notar que si la desigualdad fuese soporte debería cumplirse lo siguiente:

$$a^t x^T = \sum_{e \in E(P_i)} a_e x_e^T + \sum_{e \in T \cap \delta(P_i)} a_e x_e^T + \sum_{e \in E(\bar{P}_i)} a_e x_e^T = a_0 = 10,$$

y sin embargo, como necesitamos al menos tres aristas más para poder completar una solución del *SDVRP*,

$$a^t x^T \geq 8 + 3 = 11 > a_0$$

pues los coeficientes de estas aristas son mayores o iguales que 1. □

Es sencillo comprobar que esta demostración no puede generalizarse para $s \geq 5$, pues,

$$\text{número aristas} = \frac{\sum \text{grados vértices}}{2} \geq \frac{4+2(2s-1)}{2} = 2 + (2s-1) = 2s+1,$$

$$a^t x^T \geq 8 + ((2s+1) - 4) = 2s+5,$$

y como $a_0 = 3s+1$ tenemos que:

$$2s+5 > 3s+1 \Leftrightarrow 4 > s.$$

Por último, comentar que en Martínez (1995) se demuestra que las desigualdades *path* y las *wheelbarrow* son precisamente las restricciones que surgen cuando se intentan generalizar al contexto del *SDVRP* algunas de las desigualdades *2-matching generalizadas* introducidas por Araque (1989) para el *CVRP* con demandas unitarias. Concretamente, las que surgen cuando la capacidad del vehículo se establece en un valor tal, que la demanda de 6 clientes cualesquiera puede servirse completamente utilizando un único vehículo.

4. CONSIDERACIONES FINALES

El estudio poliédrico que hemos realizado nos ha permitido extender resultados conocidos para el poliedro del *Agente Viajero Gráfico* al poliedro del *Problema de Rutas de Vehículos con Demanda Compartida*. Hemos visto cómo las desigualdades asociadas a las configuraciones *path*, *wheelbarrow* y *bicycle* son también válidas para el P_{SDVRP} y bajo ciertas condiciones incluso inducen facetas.

Las desigualdades que hemos considerado en este trabajo no son las únicas familias de desigualdades válidas conocidas para el *SDVRP*. Como hemos dicho en la introducción, en Martínez *et al.* (2000) y Belenguer *et al.* (2000) se presentan nuevas restricciones, que bajo condiciones adecuadas, también inducen facetas del P_{SDVRP} . Además, por lo que nosotros sabemos, estos trabajos son, hoy por hoy, los únicos en los que se estudia la estructura facial del P_{SDVRP} . No obstante, cabe la posibilidad de continuar la investigación en esta línea tratando de deducir condiciones bajo las cuáles, desigualdades como, las *path*, *wheelbarrow* y *bicycle* con *capacidades*, introducidas en Cornuéjols y Harche (1993) para el *GVRP*, las clásicas restricciones *comb* y *clique tree* del *TSP* (Grötschel y Padberg, 1985), o las de *capacidad generalizada* del *CVRP* (Harche y Rinaldi, 1991), induzcan facetas del P_{SDVRP} . La adaptación de estas restricciones al *SDVRP* y la demostración de su validez para el correspondiente poliedro pueden consultarse en Martínez (1995).

Por último, nos gustaría destacar que, aparte del interés estrictamente teórico que pueden tener los resultados que hemos presentado en este trabajo, la sencillez de las condiciones establecidas los hacen también atractivos desde el punto de vista práctico. Sin duda, será interesante investigar el desarrollo de algoritmos que permitan identificar restricciones de este tipo cuando sean violadas por soluciones fraccionarias, lo cuál ayudaría a resolver instancias del problema de tamaño superior a las resueltas hasta el momento. Desde este punto de vista, el trabajo que hemos presentado abre la puerta a futuras investigaciones en relación con el tema, a la vez que amplía el conocimiento de la estructura facial del P_{SDVRP} .

AGRADECIMIENTOS

Nos gustaría expresar nuestro agradecimiento a los dos evaluadores anónimos por sus comentarios sobre el trabajo, los cuáles nos han permitido mejorar el enfoque y la calidad del mismo.

REFERENCIAS

- Araque, J.R. (1989). *A Polyhedral Approach to Vehicle Routing*. Comunicación presentada en ORSA/TIMS Meeting. New York.
- Augerat, P., Belenguer, J.M., Benavent, E., Corberán, A., Naddef, D. y Rinaldi, G. (1995). «Computational Results with a Branch and Cut Code for the Vehicle Routing Problem». *Technical Report RR949-M*. Institut IMAG. Grenoble.
- Belenguer, J.M. y Martínez, M.C. (2000). «Búsqueda Tabú en Problemas de Rutas de Vehículos con Demanda Compartida». *Technical Report 1-00*. Universitat de València.
- Belenguer, J.M., Martínez, M.C. y Mota, E. (2000). «A Lower Bound for the Split Delivery Vehicle Routing Problem». *Operations Research*, 48, 801-810.
- Bodin, L.D., Golden, B.L., Assad, A.A. y Ball, M.O. (1983). «Routing and Scheduling of Vehicles and Crews: The State of the Art». *Computers and Operations Research*, 10, 63-211.
- Christofides, N. (1985). «Vehicle Routing», in: *The Traveling Salesman Problem: A Guided Tour of Combinatorial Optimization*, E.L. Lawler, J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan y D.B. Shmoys eds. Wiley, Chichester, 431-448.
- Cornuéjols, G., Fonlupt, J. y Naddef, D. (1985). «The Traveling Salesman Problem on a Graph and some Related Integer Polyhedra». *Mathematical Programming*, 33, 1-27.
- Cornuéjols, G. y Harche, F. (1993). «Polyhedral Study of the Capacitated Vehicle Routing Problem». *Mathematical Programming*, 60, 21-52.
- Dror, M. y Trudeau, P. (1989). «Savings by Split Delivery Routing». *Transportation Science*, 23, 141-145.
- Dror, M. y Trudeau, P. (1990). «Split Delivery Routing». *Naval Research Logistics*, 37, 383-402.
- Garey, M.R. y Johnson, D.S. (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness*. Freeman, San Francisco.
- Grötschel, M. y Padberg, M.W. (1985). «Polyhedral Theory», in: *The Traveling Salesman Problem: A Guided Tour of Combinatorial Optimization*, E.L. Lawler, J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan y D.B. Shmoys eds. Wiley, Chichester, 251-305.
- Martínez, M.C. (1995). *Rutas de Vehículos con Demanda Compartida*. Tesis Doctoral. Universitat de València.

- Martínez, M.C., Mota, E. y Rinaldi, G. (2000). «The Split Delivery Vehicle Routing Polyhedron: New Families of Facet Defining Inequalities». En proceso de revisión.
- Naddef, D. y Rinaldi, G. (1991). «The Symmetric Traveling Salesman Polytope: New Facets from the Graphical Relaxation». *Technical Report*, 248. Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica del CNR. Roma.
- Nemhauser, G.L. y Wolsey, L.A. (1988). *Integer and Combinatorial Optimization*. Wiley, New York.
- Padberg, M.W. y Rinaldi, G. (1991). «A Branch and Cut Algorithm for the Resolution of Large-Scale Symmetric Traveling Salesman Problems». *SIAM Review*, 33 (1), 60-100.
- Pulleyblank, W.R. (1983). «Polyhedral Combinatorics», in: *Mathematical Programming: The State of the Art*, A. Bachem, M. Grötschel and B. Korte eds. Springer, Berlin.

APÉNDICE

Dados K vehículos de capacidad Q , si $0 \in A$ y se cumplen las dos condiciones:

- i.- $K \geq \frac{s-1}{2}$, y
- ii.- $Q \geq d(P_s) + d(P_{s-1}) + d(P_{s-2})$, siendo $d(P_1) \leq d(P_2) \leq \dots \leq d(P_s)$.

entonces, las desigualdades «wheelbarrow» inducen facetas de P_{SDVRP} .

Demostración

Análogamente a como hemos hecho con las desigualdades *path*, vamos a construir s soluciones distintas, una para cada camino P_i , que nos permitirán demostrar el resultado vía el método indirecto. Las soluciones se construyen siguiendo el mismo procedimiento que con las *path* excepto en la forma de unir las parejas de caminos. Se unirán utilizando la arista que une a los representantes de sus subconjuntos extremos, $B_{n_r}^r$. En la figura 8 presentamos la solución asociada al camino P_i , la llamaremos T^i . No es difícil comprobar que las hipótesis establecidas garantizan la existencia de una asignación de demandas a vehículos de forma que con $\frac{s-1}{2}$ vehículos se sirven los clientes de $V \setminus A$.

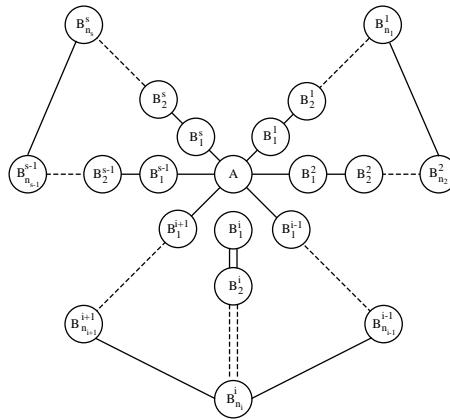


Figura 8. Solución T^i para una configuración *wheelbarrow*.

Demostraremos a continuación que las soluciones así construidas cumplen con igualdad la desigualdad *wheelbarrow* $d^i x \geq 1 + \sum_{r=1}^s \frac{n_r + 1}{n_r - 1}$. Probado esto es evidente que se

trata de una desigualdad propia, ya que basta con duplicar cualquiera de las aristas utilizadas con coeficiente estrictamente positivo, para encontrar una solución que cumple la desigualdad con mayor estricto.

A fin de simplificar las cuestiones de notación comprobaremos el resultado para la solución T^{s-1} , la demostración para el resto de soluciones, T^i , sería análoga.

Observar que las únicas aristas en la solución con coeficiente no nulo son, las que unen a dos subconjuntos B_p^r consecutivos en cada camino P_r , con $r = 1, \dots, s$, $r \neq i$, y las que utilizamos para unir parejas de caminos. Supongamos que los caminos se han unido de dos en dos empezando por el primero y en orden ascendente, es decir, la demanda de los clientes en P_{2r-1} y P_{2r} se sirve utilizando el mismo vehículo, para cada $r = 1, \dots, \frac{s-3}{2}$. Evaluaremos $a^t x^{T^{s-1}}$ contando las aristas que se utilizan en la solución y cuánto valen sus coeficientes. Para cada uno de estos caminos se utilizan n_r aristas de peso $\frac{1}{n_r-1}$ y una arista de peso $\frac{n_{2r}}{n_{2r}-1} - \frac{n_{2r-1}-2}{n_{2r-1}-1}$ por cada par de caminos unidos. Además, hay $2(n_{s-1}-1)$ aristas de peso $\frac{1}{n_{s-1}-1}$ que recorren los subconjuntos de P_{s-1} , n_{s-2} aristas de peso $\frac{1}{n_{s-2}-1}$ para P_{s-2} y n_s de peso $\frac{1}{n_s-1}$ para P_s , mas las dos aristas que unen a P_{s-2} con P_{s-1} y a éste con P_s .

Observar que el coeficiente de las aristas que unen los subconjuntos finales de dos caminos cualesquiera, P_{2r-1} y P_{2r} es:

$$\max \left\{ \frac{n_{2r}}{n_{2r}-1} - \frac{n_{2r-1}-2}{n_{2r-1}-1}, \frac{n_{2r-1}}{n_{2r-1}-1} - \frac{n_{2r}-2}{n_{2r}-1} \right\},$$

puede comprobarse fácilmente que en este caso el máximo es único e igual a:

$$\frac{1}{n_{2r}-1} + \frac{1}{n_{2r-1}-1}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} a^t x^{T^{s-1}} &= \sum_{r=1, r \neq s-1}^s \frac{n_r}{n_r-1} + \sum_{r=1}^{\frac{s-1}{2}} \left(\frac{n_{2r}}{n_{2r}-1} - \frac{n_{2r-1}-2}{n_{2r-1}-1} \right) + \\ &\frac{n_s}{n_s-1} - \frac{n_{s-1}-2}{n_{s-1}-1} + \frac{2n_{s-1}-2}{n_{s-1}-1}, \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} a^t x^{T^{s-1}} &= \sum_{r=1}^s \frac{n_r}{n_r-1} + \sum_{r=1}^{\frac{s-1}{2}} \left(\frac{n_{2r}}{n_{2r}-1} - \frac{n_{2r-1}-2}{n_{2r-1}-1} \right) + \frac{n_s}{n_s-1} = \\ &\sum_{r=1}^{\frac{s-1}{2}} \left(\frac{n_{2r}}{n_{2r}-1} + \frac{n_{2r-1}}{n_{2r-1}-1} + \frac{n_{2r}}{n_{2r}-1} - \frac{n_{2r-1}-2}{n_{2r-1}-1} \right) + \frac{2n_s}{n_s-1} = \\ &\sum_{r=1}^{\frac{s-1}{2}} \left(\frac{n_{2r}}{n_{2r}-1} + \frac{n_{2r-1}}{n_{2r-1}-1} + \frac{n_{2r}(n_{2r-1}-1) - (n_{2r-1})(n_{2r-1}-2)}{(n_{2r}-1)(n_{2r-1}-1)} \right) + \frac{2n_s}{n_s-1}, \end{aligned}$$

que por unicidad del máximo es igual a,

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^{\frac{s-1}{2}} \left(\frac{n_{2r}}{n_{2r-1}} + \frac{n_{2r-1}}{n_{2r-1}-1} + \frac{1}{n_{2r-1}} + \frac{1}{n_{2r-1}-1} \right) + \frac{2n_s}{n_s-1} = \\ & \sum_{r=1}^{\frac{s-1}{2}} \left(\frac{n_{2r}+1}{n_{2r-1}} + \frac{n_{2r-1}+1}{n_{2r-1}-1} \right) + \frac{2n_s}{n_s-1} = \\ & 1 + \sum_{r=1}^s \frac{n_r+1}{n_r-1}. \end{aligned}$$

Probado que la desigualdad *wheelbarrow*, $d^t x \geq a_0$, es soporte y no trivial, supongamos ahora que existe una desigualdad $f^t x \geq a_0$ que define una faceta del poliedro y cumple:

$$\{x \in P_{SDVRP} \mid d^t x = a_0\} \subseteq \{x \in P_{SDVRP} \mid f^t x = a_0\}.$$

Demostraremos que $f_e = a_e, \forall e \in E$ y que por tanto $d^t x \geq a_0$ induce una faceta del P_{SDVRP} .

La demostración de los dos primeros casos es análoga a la realizada para las desigualdades *path* pero teniendo en cuenta la solución T^i que hemos descrito para las configuraciones *wheelbarrow*.

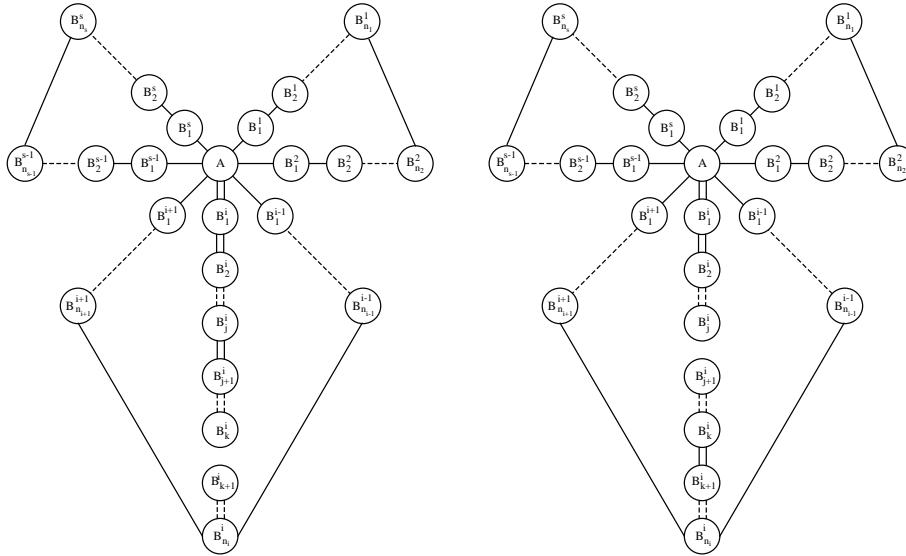


Figura 9. Soluciones demostrando que $f_e = f_{e'}, \forall e \in (B_j^i, B_{j+1}^i), \forall e' \in (B_k^i, B_{k+1}^i)$.

1. $f_e = a_e = 0, \forall e \in E(B_j^i), i = 1, \dots, s, j = 0, \dots, n_i$.
2. $f_e = f_{b_j^r b_{j+1}^r}, \forall e \in (B_j^r, B_{j+1}^r), r = 1, \dots, s, j = 0, \dots, n_r - 1$.
3. $f_e = a_e, \forall e \in (B_j^i, B_{j+1}^i), i = 1, \dots, s, j = 0, \dots, n_i - 1$. En primer lugar demostraremos que todas las aristas de cualquiera de las cortaduras definidas por dos subconjuntos consecutivos en un mismo P_i tienen el mismo coeficiente, que denominaremos π_i . Es decir, dado un $i = 1, \dots, s$, queremos ver que $f_e = f_{e'} \forall e \in (B_j^i, B_{j+1}^i)$ y $\forall e' \in (B_k^i, B_{k+1}^i)$ siendo j y k dos índices distintos de $\{0, \dots, n_i - 1\}$. Para demostrarlo basta con comparar las soluciones de la figura 9, observar que solamente se diferencian en aristas que pertenecen a estas cortaduras, además ambas pertenecen a la cara inducida por la desigualdad *wheelbarrow*, y por lo tanto también a la inducida por $f^t x \geq a_0$.

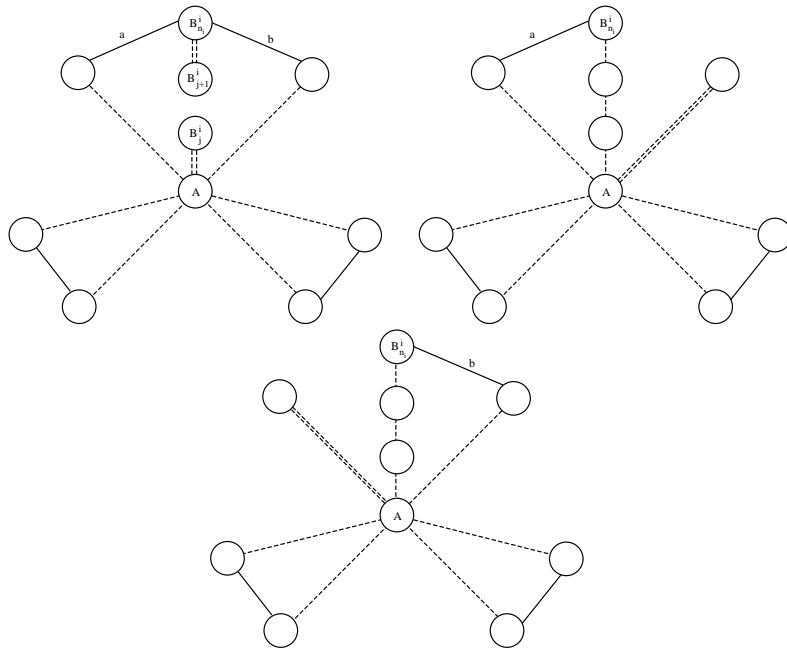


Figura 10. T^i, T^{i-1}, T^{i+1} soluciones del SDVRP pertenecientes a la cara inducida por la desigualdad *wheelbarrow*.

Una vez visto que $f_e = \pi_i, \forall e \in (B_j^i, B_{j+1}^i)$, para cada $i = 1, \dots, s$, completaremos la demostración resolviendo el sistema que se obtiene al sustituir en $f^t x$ los vectores de incidencia asociados a las soluciones T^{i-1}, T^i y $T^{i+1}, i = 2, \dots, s - 1$, figura 10. Estas soluciones corresponden a los tours utilizados en Cornuéjols *et al.* (1985) para demostrar el teorema 3.5. Gracias a las hipótesis establecidas sobre el número de

vehículos disponibles y su capacidad no es difícil comprobar que estos tours definen soluciones posibles del *SDVRP*. Como los tres vectores de incidencia cumplen $a^t x = a_0$, también cumplirán $f^t x = a_0$, de donde obtenemos,

$$\begin{aligned} f^t x^{T^i} &= f^t x^{T^{i-1}} \\ f^t x^{T^i} &= f^t x^{T^{i+1}} \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} n_{i-1}\pi_{i-1} + 2(n_i - 1)\pi_i + f_{b_{n_{i-1}}^{i-1} b_{n_i}^i} + f_{b_{n_i}^i b_{n_{i+1}}^{i+1}} + n_{i+1}\pi_{i+1} &= \\ 2n_{i-1}\pi_{i-1} + n_i\pi_i + f_{b_{n_{i-1}}^{i-1} b_{n_i}^i} + n_{i+1}\pi_{i+1} & \\ n_{i-1}\pi_{i-1} + 2(n_i - 1)\pi_i + f_{b_{n_{i-1}}^{i-1} b_{n_i}^i} + f_{b_{n_i}^i b_{n_{i+1}}^{i+1}} + n_{i+1}\pi_{i+1} &= \\ n_{i-1}\pi_{i-1} + f_{b_{n_{i-1}}^{i-1} b_{n_i}^i} + n_i\pi_i + 2n_{i+1}\pi_{i+1} & \\ \downarrow & \\ (n_i - 2)\pi_i + f_{b_{n_{i-1}}^{i-1} b_{n_i}^i} + f_{b_{n_i}^i b_{n_{i+1}}^{i+1}} &= \\ n_{i-1}\pi_{i-1} + f_{b_{n_{i-1}}^{i-1} b_{n_i}^i} & \\ (n_i - 2)\pi_i + f_{b_{n_{i-1}}^{i-1} b_{n_i}^i} + f_{b_{n_i}^i b_{n_{i+1}}^{i+1}} &= \\ n_{i+1}\pi_{i+1} + f_{b_{n_{i-1}}^{i-1} b_{n_i}^i} & \end{aligned}$$

que, considerándolo para $i = 2, \dots, s-1$, proporciona el sistema:

$$\begin{aligned} (n_2 - 2)\pi_2 + f_{b_{n_1}^1 b_{n_2}^2} + f_{b_{n_2}^2 b_{n_3}^3} &= n_1\pi_1 + f_{b_{n_2}^2 b_{n_3}^3} \\ (n_2 - 2)\pi_2 + f_{b_{n_1}^1 b_{n_2}^2} + f_{b_{n_2}^2 b_{n_3}^3} &= n_3\pi_3 + f_{b_{n_1}^1 b_{n_2}^2} \\ &\vdots \\ (n_i - 2)\pi_i + f_{b_{n_{i-1}}^{i-1} b_{n_i}^i} + f_{b_{n_i}^i b_{n_{i+1}}^{i+1}} &= n_{i-1}\pi_{i-1} + f_{b_{n_i}^i b_{n_{i+1}}^{i+1}} \\ (n_i - 2)\pi_i + f_{b_{n_{i-1}}^{i-1} b_{n_i}^i} + f_{b_{n_i}^i b_{n_{i+1}}^{i+1}} &= n_{i+1}\pi_{i+1} + f_{b_{n_{i-1}}^{i-1} b_{n_i}^i} \\ &\vdots \\ (n_{s-1} - 2)\pi_{s-1} + f_{b_{n_{s-2}}^{s-2} b_{n_{s-1}}^{s-1}} + f_{b_{n_{s-1}}^{s-1} b_{n_s}^s} &= n_{s-2}\pi_{s-2} + f_{b_{n_{s-1}}^{s-1} b_{n_s}^s} \\ (n_{s-1} - 2)\pi_{s-1} + f_{b_{n_{s-2}}^{s-2} b_{n_{s-1}}^{s-1}} + f_{b_{n_{s-1}}^{s-1} b_{n_s}^s} &= n_s\pi_s + f_{b_{n_{s-2}}^{s-2} b_{n_{s-1}}^{s-1}} \end{aligned}$$

cuya solución es:

$$\begin{aligned} \pi_i &= \frac{h}{n_i - 1} \\ f_{b_{n_i}^i b_{n_{i+1}}^{i+1}} &= \frac{h}{n_i - 1} + \frac{h}{n_{i+1} - 1} \quad i = 1, \dots, s \end{aligned}$$

Sustituyendo en $f^t x$ el vector de incidencia asociado a T^{s-1} y teniendo en cuenta que ha de ser igual a a_0 , tenemos:

$$f^t x^{T^{s-1}} = \sum_{r=1}^{\frac{s-1}{2}} \left(\frac{n_{2r} h}{n_{2r}-1} + \frac{n_{2r-1} h}{n_{2r-1}-1} + \frac{h}{n_{2r}-1} + \frac{h}{n_{2r-1}-1} \right) + \frac{2n_s h}{n_s-1}$$

de donde,

$$f^t x^{T^{s-1}} = h \left(1 + \sum_{r=1}^s \frac{n_r + 1}{n_r - 1} \right) = h a_0 = a_0$$

luego, $h = 1$, lo que demuestra que los coeficientes de las aristas que estamos considerando coinciden en a y en f .

4. $f_e = a_e, \forall e \in (B_j^i, B_p^r), i \neq r, 1 \leq j \leq n_i$ y $1 \leq p \leq n_r$. No hay pérdida de generalidad en hacer la demostración para una arista de la cortadura $e \in (B_j^{s-2}, B_p^{s-1})$. Ya hemos demostrado que los coeficientes en a y f coinciden para el resto de las aristas, lo que nos permitirá demostrar el resultado basándonos simplemente en el hecho de que la solución de la figura 11, T' , es una solución del *SDVRP* que cumple $a^t x^{T'} = a_0$ con igualdad, por lo que también cumplirá $f^t x^{T'} = a_0$.

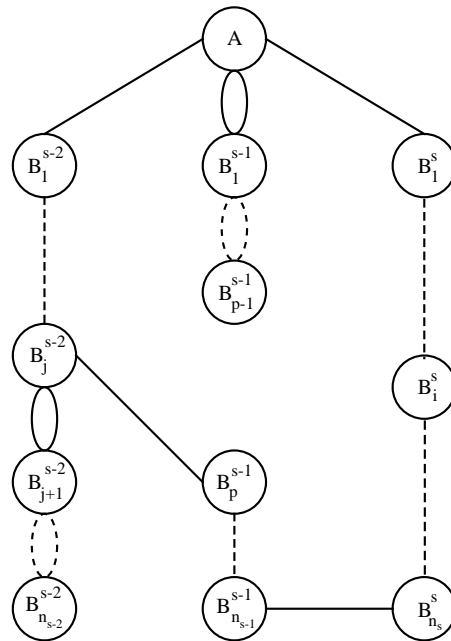


Figura 11. Solución T' .

En efecto:

$$\begin{aligned}
a^t x^{T'} &= \sum_{r=1}^{s-3} \frac{n_r+1}{n_r-1} + \frac{n_{s-2}-j}{n_{s-2}-1} + \frac{n_{s-2}}{n_{s-2}-1} + \\
&\frac{j}{n_{s-2}-1} - \frac{p-2}{n_{s-1}-1} + \frac{2(p-1)}{n_{s-1}-1} + \frac{n_{s-1}-p}{n_{s-1}-1} + \\
&\frac{1}{n_{s-1}-1} + \frac{1}{n_s-1} + \frac{n_s}{n_s-1} = \\
\sum_{r=1}^{s-3} \frac{n_r+1}{n_r-1} + \frac{n_{s-2}-j+n_{s-2}+j}{n_{s-2}-1} + \frac{-p+2+2p-2+n_{s-1}-p+1}{n_{s-1}-1} + \frac{1+n_s}{n_s-1} &= \\
\sum_{r=1}^{s-3} \frac{n_r+1}{n_r-1} + \frac{n_{s-2}+1+n_{s-2}-1}{n_{s-2}-1} + \frac{n_{s-1}+1}{n_{s-1}-1} + \frac{n_s+1}{n_s-1} &= \\
1 + \sum_{r=1}^s \frac{n_r+1}{n_r-1} &= a_0
\end{aligned}$$

como consecuencia,

$$f^t x^{T'} - a^t x^{T'} = f_e - a_e = 0 \longrightarrow f_e = a_e$$

Concluimos así que las desigualdades asociadas a las configuraciones *wheelbarrow* inducen facetas del P_{SDVRP} .

ENGLISH SUMMARY

FROM THE GRAPHICAL TRAVELING SALESMAN POLYHEDRON TO THE ONE ASSOCIATED WITH THE SPLIT DELIVERY VEHICLE ROUTING PROBLEM

CARMEN MARTÍNEZ
ENRIQUE MOTA
Universitat de València*

In this paper we study the polyhedron associated with the Split Delivery Vehicle Routing Problem, a distribution problem arising in the context of servicing goods to clients using a fixed fleet of identical vehicles with limited capacity. The objective is to design a set of routes in such a way that the total distance travelled is minimized. The main difference with other known routing problems is that the demand of a given client can be serviced among several vehicles. We present some polyhedral results that are obtained as extensions of previously known results for the Graphical Traveling Salesman Problem.

Keywords: Vehicle routing, split delivery, polyhedron, facets

AMS Classification (MSC 2000): 90C10, 90C27, 90C35

*Departament d'Estadística i Investigació Operativa. Universitat de València. Dr. Moliner, 50. Burjassot, 46100. España. E-mail: M.Carmen.Martinez@uv.es

–Received October 1999.

–Accepted October 2000.

1. INTRODUCTION

The *Split Delivery Vehicle Routing Problem (SDVRP)* is a relaxation of the classical *Capacitated Vehicle Routing Problem (CVRP)*, in which the demand of any client can be serviced by more than one vehicle. This relaxation may result in cheaper solutions, both in terms of the total distance travelled, as well as in the number of vehicles to be used. Moreover, the minimum number of vehicles needed to service the total demand is always known in advance. However, the *SDVRP* remains an *NP-hard* problem (Dror and Trudeau, 1990). Hopefully, the knowledge of the structure of the polyhedron associated with the *SDVRP* feasible solutions will allow the optimal resolution of bigger and bigger instances. The purpose of this paper is to continue the polyhedral study presented in Belenguer *et al.* (2000) and in Martínez *et al.* (2000).

2. NOTATION AND PROBLEM DEFINITION

Let $G = (V, E)$ be a complete and undirected graph, where the set of vertices, V , represents n clients with known integer demands, d_i , and a depot, vertex 0, where a fleet of K identical vehicles of capacity Q is located. Each edge $e = (i, j)$ in E represents the (shortest) path between i and j .

In Belenguer *et al.* (2000), the feasible solutions of the *SDVRP* are defined on G , in terms of a multiset of edges subject to problem constraints. It is also proved that the convex hull of the incidence vectors associated with the *SDVRP* feasible solutions is an unbounded and full dimensional polyhedron, denoted in what follows P_{SDVRP} . Moreover, such vectors satisfy a simple set of constraints, (1) – (4), which in fact defines a relaxation of the *SDVRP*. These constraints, subject to small changes, have also been considered in the formulation of the *Graphical TSP (GTSP)* and in the graphical relaxation of the *CVRP*, the *GVRP*. Using the above relaxation, Belenguer *et al.* (2000) solved to optimality *SDVRP* instances up to 50 clients, and Martínez *et al.* (2000) obtained the complete linear description of the polyhedron associated to a *SDVRP* instance with 5 clients and 2 vehicles.

3. FROM P_{GTSP} TO P_{SDVRP}

From the *GVRP*, *SDVRP*, and *GTSP* problem definitions it is easy to see that $P_{GVRP} \subseteq P_{SDVRP} \subseteq P_{GTSP}$, and therefore, every *GTSP* valid inequality will also be a valid inequality for the *SDVRP*. However, the facial structures can not be so easily related.

In this section we extend to the P_{SDVRP} some inequalities that are facet defining inequalities for the P_{GTSP} . These inequalities are associated with some complex structures,

known as *path*, *wheelbarrow* and *bicycle configurations*, that were first introduced in Cornuéjols *et al.* (1985) for the P_{GTSP} . Obviously, *path*, *wheelbarrow* and *bicycle inequalities* are valid inequalities for the P_{SDVRP} , since they are valid for the P_{GTSP} .

Moreover, if the conditions given in Cornuéjols and Harche (1993) hold, the *path inequalities* not only induce facets of P_{GVRP} , but also of P_{SDVRP} . Next theorem presents another set of conditions, easier to check and, at least in some cases, weaker than the ones given in Cornuéjols and Harche (1993).

Theorem 1. *Given K vehicles of capacity Q , if $0 \in A$ (or if $0 \in Z$), and the following conditions hold:*

$$i.- \quad K \geq \frac{s-1}{2},$$

$$ii.- \quad Q \geq d(P_s) + d(P_{s-1}) + d(P_{s-2}), \text{ such that } d(P_1) \leq d(P_2) \leq \dots \leq d(P_s), \text{ and}$$

$$iii.- \quad Q \geq 2 \left\lceil \frac{d(Z) + \sum_{i=1}^s d(P_i)}{s-1} \right\rceil$$

then, path inequalities induce facets of P_{SDVRP} .

In the appendix it is shown that conditions i) and ii) are sufficient to guarantee that *wheelbarrow inequalities* induce facets of P_{SDVRP} .

Following the same lines as in Cornuéjols and Harche (1993), we have proved the following result:

Theorem 2. *If $0 \in B_j^i$, with, $i = 1, \dots, s$, $j = 1, \dots, n_i$, and $d(V \setminus B_j^i) \leq Q$, then, path, wheelbarrow and bicycle inequalities induce facets of P_{SDVRP} .*

Finally, this section includes some results, showing situations in which *path inequalities* are not even support inequalities (**Proposition 1**), exhibiting a special kind of a *path configuration* for which *path inequalities* can not define facets (**Proposition 2**), or conditions under which some *bicycle inequalities* are dominated (**Proposition 3**).

In Martínez (1995) it is shown that *path* and *wheelbarrow* inequalities are in fact the *2-matching generalized inequalities*, first introduced in Araque (1989) for the $CVRP$ with unit demands.

4. FINAL COMMENTS

New families of valid inequalities, that under given conditions are also facet-defining inequalities, are presented in Martínez *et al.* (2000) and Belenguer *et al.* (2000). In

Martínez (1995), valid inequalities for the P_{SDVRP} are obtained from other inequalities defined for the P_{GVRP} , for the P_{TSP} and for the P_{CVRP} . Further research remains to be done in order to show if there are conditions under which they induce facets of P_{SDVRP} .

The results presented in this paper have more than just a theoretical interest, since the simple conditions imposed in order to guarantee the facial character of *path inequalities* could be incorporated, via new identification routines, into a general procedure that would allow the resolution of bigger $SDVRP$ instances.