QÜESTIIÓ, vol. 26, 3, p. 503-513, 2002

LA DISTÀNCIA DE l'EIXAMPLE

M. GREENACRE
Universitat Pompeu Fabra*

Inspirant-nos en el disseny de l'Eixample de Barcelona per Ildefons Cerdà, definim una nova distància estadística, anomenada la distància de l'eixample. Estudiarem algunes propietats d'aquesta funció de distància i proposem algunes possibles aplicacions.

The Eixample Distance

Paraules clau: Statistical distance, Manhattan distance, Euclidean distance

Classificació AMS (MSC 2000): 62H17, 62H25

* Universitat Pompeu Fabra. Barcelona.

– Rebut al desembre de 2001.
– Acceptat a l'octubre de 2002.

1. INTRODUCCIÓ

Ildefons Cerdà i Sunyer (1815-1876), el dissenyador de l'Eixample de Barcelona, no era només enginyer, urbaniste i catalanista. El 1856, tres anys abans de presentar *El Proyecto de Ensanche de 1859*, va publicar el seu primer llibre: *Una Monografía Estadística de la Classe Obrera de Barcelona*. Era una obra molt detallada, plena de taules i llistes, basada en fets recollits pel mateix Cerdà, i era el primer estudi de l'espai urbà de Barcelona, dels serveis de transport i de sanitat i de les condicions de treball dels seus ciutadans. Mai no s'havia donat a aquests assumptes una base estadística, i aquesta base sòlida de dades el va conduir a una visió global de les necessitats de la ciutat renovada i reconstruïda.

Figura 1. Ildefons Cerdà i Sunyer (1815-1876).

No entrarem en més detalls del Pla Cerdà, a part de citar, segons l'exposició del Pla Cerdà i de *Urbs Quadrada*, organitzada a la Universitat Pompeu Fabra per l'Institut d'Estudis Territorials l'any 1999, que Cerdà va deduir «*la dimensió de la mansana... a través d'una fórmula matemàtica que considera com variables l'amplada del carrer, la longitud de la façana, la fondària del solar, les característiques de la unitat d'habitació* *definida el 1855 i el nombre de metres quadrats per habitant*». Sembla que Cerdà va tenir habilitat també per a l'anàlisi multivariant.

En aquest article ens inspirem en el disseny bàsic de les mansanes de l'eixample, proposada per en Cerdà, per donar a la llum una nova mesura de distància estadística. Els que han caminat per l'eixample s'han adonat que és possible escurçar la distància entre dos punts aprofitant dels xamfrans[1] a cada cantonada d'una mansana. Definirem una distància suggerida d'aquesta observació, que anomenarem la ***distància de l'eixample***, i n'estudiarem algunes propietats i possibles aplicacions.

Figura 2. La visió d'en Cerdà.

2. DISTÀNCIA DE l'EIXAMPLE: DEFINICIÓ

Per al nostre objectiu és suficient de considerar un eixample sense carrers ni voreres entre les mansanes. Això no és cap restricció, perquè podem suposar que aquesta amplada està continguda en la longitud de les façanes. És a dir, si el carrer i les voreres tenen un amplada total de 35 m (que era, de fet, l'amplada recomanada per Cerdà), es pot comptar aquesta longitud en la de la façana de cada edifici.

[1] **xamfrà** Xamfrà constituïda per un pla que forma angles obtusos, especialment de 135°, amb cadascuna de les dues façanes que la determinen.

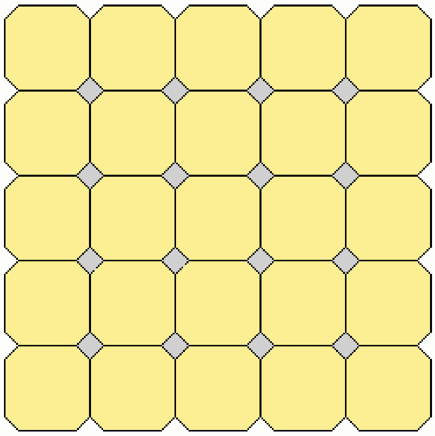

Figura 3. Un Eixample sense Carrers ni Voreres.

Aleshores considerem un eixample com el dibuixat a la Figura 3. Cada mansana té vuit costats, quatre façanes i quatre xamfrans (Figura 4), i suposem que l'angle del xamfrà és de 135°. Sigui a la longitud de la façana i b la longitud del seu xamfrà. Anomenem la longitud del quadre format per la mansana la *longitud exterior*. La longitud exterior de la mansana és igual a $a+\sqrt{2}b$.

Suposem que hem de calcular la distància entre un punt amb coordenades (x_1, y_1) i un altre amb coordenades (x_2, y_2). Siguin les diferències absolutes entre les coordenades:

$$x = |x_1 - x_2| \qquad y = |y_1 - y_2|$$

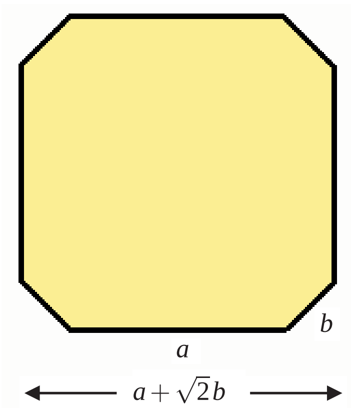

Figura 4. Longitud de la façana i de la xamfrà, i longitud exterior.

Provisionalment suposem que els números positius x i y tenen un factor comú. Un exemple senzill seria $x = 2$ i $y = 3$ amb factor comú 1. Llavors suposem que la longitud exterior de cada façana és igual a 1, és a dir $a + \sqrt{2}b = 1$.

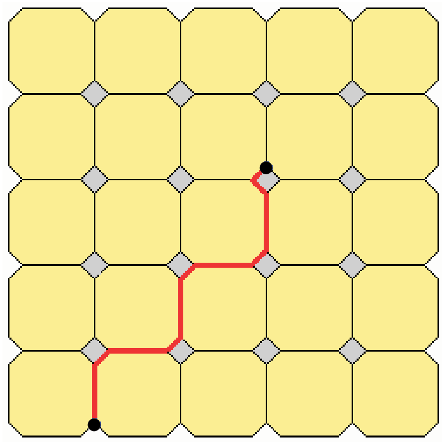

Figura 5. La distància de l'eixample (en traç gruixut).

A la Figura 5 els dos punts en negre tenen la posició relativa desitjada (comencem i acabem sempre a la mateixa posició en una mansana, en aquest cas al punt nord de la cruïlla). Per caminar una distància mínima entre aquests dos punts hauríem de passar per 5 façanes i 6 xamfrans. És fàcil deduir que el número de façanes és igual a la suma de x i y, i que el número de xamfrans és igual a la suma més la diferència absoluta. En aquest exemple $2+3=5$ i $2+3+|2-3|=6$. Llavors la distància a caminar és igual a $5a+6b$.

Un altre exemple més concret és la distància a caminar entre el *Forum Vergés*, actualment l'Institut d'Educació Continua (IdEC) de la Universitat Pompeu Fabra, a la cruïlla de Balmes i Rosselló, i *La Pedrera* de Gaudí a la cruïlla de Provença i Passeig de Gràcia. Aquests edificis tenen la mateixa orientació al sud-oest de les mansanes respectives, i tenen una illa de diferència en la direcció nord-sud i dues en la direcció est-oest. Aleshores, la distància a caminar és igual a $3a+4b$, on a és en aquest cas la longitud de la façana més l'amplada del carrer (suposant, és clar, que cada mansana és perfectament quadrada).

Aquest resultat no depèn de la mida de la mansana, però sí que depèn de la relació entre a i b. Si enlloc de mansanes de longitud exterior 1, considerem mansanes de longitud exterior $1/n$, on n és un enter, el nombre de façanes i xamfrans a caminar està multiplicat per n, però la longitud de cada façana i xamfrà està dividida per n, llavors la distància a caminar queda igual. En general, per a nombres x i y reals, no trobarem necessàriament un factor comú per dividir el pla en mansanes. Però, per a nombres arrodonits sempre podem escriure:

$$x = m \times 10^k \qquad y = n \times 10^k$$

on m,n i k són enters, m,n positius i k tant gran en valor absolut com volguem. Aleshores la longitud exterior de la façana serà 10^k i el punt tindrà m mansanes de diferència a l'eix horitzontal i n a l'eix vertical.

Les longituds a i b de la façana amb longitud exterior de 10^k han de satisfer la igualtat: $a + \sqrt{2}b = 10^k$. Si definim la relació entre b i a com $c = b/a$, llavors:

$$a = \frac{1}{1+\sqrt{2}c} = 10^k \qquad b = \frac{c}{1+\sqrt{2}c}10^k$$

i la distància a caminar és igual a:

$$\begin{aligned} d &= (m+n)a + (m+n+|m-n|)b \\ &= (x+y)\frac{1}{1+\sqrt{2}c} + \big(x+y+|x-y|\big)\frac{c}{1+\sqrt{2}c} \end{aligned}$$

Introduïm algunes definicions:

- Una **mansana de Cerdà** és un octàgon que té la forma de la Figura 4: tots els angles interiors són de 135° i els costats i els xamfrans poden tenir longituds diferents.
- El **número de Cerdà** c és la relació b/a entre les longituds del xamfrà i de la façana d'una mansana.
- Un **eixample** és una matriu de m

I, finalment, la definició de la distància de l'eixample:

- Sigui x i y la diferència absolu (x_1,y_1) i (x_2,y_2): $x = |x_1 - x_2|$, $y = |y_1 - y_2|$; sigui c el número de Cerdà de l'eixample. La **distància de l'eixample** entre els dos punts està definida com:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1+\sqrt{2}c}(x+y) + \frac{c}{1+\sqrt{2}c}(x+y+|x-y|) \\ &= \frac{1+c}{1+\sqrt{2}c}(x+y) + \frac{c}{1+\sqrt{2}c}(|x-y|) \end{aligned}$$

3. PROPIETATS

- És evident que la distància de l'eixample és una mètrica, és a dir que satisfà la desigualtat triangular. Per anar d'un punt A a un punt B, és impossible que el camí de A a un tercer punt C i de C a B sigui més curt.
- No és evident si la distància de l'eixample es pot representar en un espai euclidià o no. És un problema obert provar que podem fer una «immersió» («embedding») de les distàncies entre un conjunt de punts dins d'un espai euclidià.
- La distància de l'eixample és sempre més llarga que la distància Pitagoriana (norma L_2).
- Comparada amb la distància de Manhattan (norma L_1), la distància de l'eixample pot ser més curta o més llarga depenent de la «diagonalitat» del trajecte. Per fer un trajecte de x mansanes horizontals i y mansanes verticals, la distància de Manhattan D_M i la distància de l'eixample D_E són:

$$\begin{aligned} D_M &= (x+y)(a+\sqrt{2}b) \\ D_E &= (x+y)a+(x+y+|x-y|)b \end{aligned}$$

  Es pot demostrar que $D_E < D_M$ quan el pendent y/x és entre els valors $\sqrt{2}-1 = 0,4142$ i $1/(\sqrt{2}-1) = 2,4142$. La curiositat d'aquest resultat és que no depèn del número de Cerdà. Quan s'ha de caminar entre dos punts i el trajecte és «menys diagonal» que aproximadament dues illes en un sentit i cinc illes en l'altre, per tant la distància de l'eixample és més llarga que la distància de Manhattan. Més concretament si heu de caminar entre el Forum Vergés i La Pedrera (pendent 0,5), el camí és més curt gràcies al disseny de l'eixample. Però per caminar entre el Forum Vergés i la cruïlla Rambla de Catalunya i València (pendent 3), heu de caminar una mica més a causa dels xamfrans extres que cal passar baixant Balmes o la Rambla.

4 APLICACIONS

L'idea de parametritzar la mesura de distància és nova i té aplicacions potencials. Jugant amb el paràmetre c de la distància podrem introduir més informació en la distància entre objectes que finalment representarem visualment en un gràfic. Per exemple, podrem estimar c per ajustar les distàncies millor al pla bidimensional de representació, i després podrem donar una interpretació de la estimació. És també possible de generalitzar la distància de l'eixample a illes rectangulars, que té sentit quan tenim dues variables d'escales diferents. En aquest cas la xamfrà no tindrà necessàriament un angle interior de 135°.

Una generalització multidimensional serà igualment interessant. Inspirant-nos en la distància de l'eixample, podem definir distàncies que són combinacions lineals de distàncies conegudes, p.e. les distàncies L_1 i L_2:

$$D(\mathbf{x},\mathbf{y},\lambda) = \lambda d_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) + (1-\lambda)d_2(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

on $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ són vectors multidimensionels, d_1 és la distància L_1 de Manhattan, d_2 és la distància L_2 euclideana, i λ és un paràmetre entre 0 i 1 que es pot definir o estimar, segons l'aplicació.

AGRAÏMENTS

Voldria donar gràcies a en Daniel Serra, de l'Institut d'Estudis Territorials, d'haver portat a la Universitat Pompeu Fabra l'exposició «Urbs Quadrada» sobre el projecte de l'Eixample, i pels seus comentaris útils. S'agraeix l'ajut BFM2000-1064 del Ministeri de Ciència i Tecnologia.

REFERÈNCIES

Magrinyà, F. & Tarragó, S. (1994). *Cerdà. Urbs i Territori, una visió del futur*. Catàleg de l'exposició.

ENGLISH SUMMARY

THE EIXAMPLE DISTANCE

M. GREENACRE
Universitat Pompeu Fabra*

Taking our inspiration from the design of the Eixample district in Barcelona by Ildefons Cerdà, we define a new statistical distance function, called the Eixample Distance. We study some properties of this distance and propose some possible applications.

Keywords: Statistical distance, Manhattan distance, Euclidean distance

AMS Classification (MSC 2000): 62H17, 62H25

* Universitat Pompeu Fabra. Barcelona.
– Received December 2001.
– Accepted October 2002.

1. INTRODUCTION

The Catalan engineer and town planner, Ildefons Cerdà (1815-1876) was commissioned with the remodelling of the district of Barcelona called the Eixample (literally: «broad axis»). Cerdà based his design partially on a detailed statistical analysis of the urban area of Barcelona, its public transport and the needs of the residents. The key idea was an urban layout in the form of blocks, each of which has an interior courtyard and a characteristic octagonal shape with its four oblique «cut-off» corners providing spacious intersections. The design of the Eixample has inspired a distance function, called the Eixample distance, which imitates a path traced by a pedestrian in this district trying to minimize the distance between two points by taking maximum advantage of the oblique corners.

2. THE EIXAMPLE DISTANCE: DEFINITION

The Eixample distance is a particular combination of a distance in a «north-south» or «east-west» sense and a distance in a diagonal sense, like the sides and oblique corners respectively of a typical Eixample block in Barcelona.

This distance depends on the ratio between the length of the diagonal corner of the block (called a *xamfrà* in catalan) and the length of the façade (or *façana*), where we incorporate the width of the street into the façade without lack of generality. We call this ratio the Cerdà index, and denote it by c.

The Eixample distance between two points (x_1,x_2) and (y_1,y_2) , where $x = |x_1 - x_2|$ and $y = |y_1 - y_2|$ are the absolute differences between the respective coordinates, can then be shown to be equal to:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{1+\sqrt{2}c}(x+y) + \frac{c}{1+\sqrt{2}c}(x+y+|x-y|) \\
&= \frac{1+c}{1+\sqrt{2}c}(x+y) + \frac{c}{1+\sqrt{2}c}(|x-y|)
\end{aligned}
$$

3. PROPERTIES AND APPLICATIONS

The Eixample distance is a metric, but it is not clear whether it is Euclidean embeddable or not. It is always larger than the Pythagorean (or L_2) distance. Compared to the Manhattan (or city-block, or L_1) distance it will be shorter or longer depending on the «diagonality» of the trajectory between the two points. When the slope between the two points is between the values $\sqrt{2}-1$ and $1/(\sqrt{2}-1)$, the Eixample distance will be shorter than the Manhattan distance.

The novelty of this new distance measure is that it contains a parameter, the Cerdà index. This parameter can be varied between 0 and 1 according to some external criterion, for example the quality of the visualization of the distances in a multidimensional scaling. Thus the introduction of the parameter coul lead to an improved fit of distance representations in multidimensional scaling displays. Parametrizing the distance function allows additional information to be included in the distance and in the eventual analysis of distance.

Since the Eixample distance is a type of combination of different distances, this also suggests defining distance functions that are combinations of well-known distances, such as a convex linear combination of the L_1 and L_2 distances, leading to a more flexible class of distance measures.