SOLUCIÓ AL PROBLEMA PROPOSAT AL VOLUM 24 N. 2

PROBLEMA N. 86

Anem a proposar una funció de distribució bivariant tal que el coeficient de correlació de Spearman sigui $\rho_S = 0$, però que les variables aleatòries siguin estocàsticament dependents.

Considerem el polinomi

$$K(x) = 2x^3 - 3x^2 + x,$$

que verifica

$$K(0) = K(1) = 0.$$

Definim la funció de distribució de les variables aleatòries U, V com segueix:

$$F(u,v) = u \cdot v + \theta K(u) K(v) \qquad 0 \leqslant u,\ v \leqslant 1,$$

essent $0 \leqslant \theta \leqslant 2$ un paràmetre. Es verifica

$$\begin{aligned}
F(0,0) &= F(u,0) = F(0,v) = 0 \\
F(u,1) &= u \\
F(1,v) &= v \\
F(1,1) &= 1 \\
\frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v} F(u,v) &= 1 + \theta\left(6u^2 - 6u + 1\right)\left(6v^2 - 6v + 1\right) \geqslant 0
\end{aligned}$$

Per tant $F(u,v)$ és una funció de distribució amb marginals uniformes sobre $(0,1)$. La funció de distribució d'U és $F_U(u) = u$, i la de V és $F_V(v) = v$. Es verifica:

$$\int_0^1 K(u)\, du = \left[2\frac{u^4}{4} - 3\frac{u^3}{3} + \frac{u^2}{2}\right]_0^1 = 0$$

El coeficient de correlació de Spearman entre U i V és el coeficient de correlació ordinari entre $F_U(U) = U$ i $F_V(V) = V$, és a dir

$$\begin{aligned}
\rho_S &= 12\int_0^1\int_0^1 (F(u,v) - u \cdot v)\, du\, dv \\
&= 12\theta\int_0^1\int_0^1 K(u) \cdot K(v)\, du\, dv = 12\theta\int_0^1 K(u)\, du \cdot \int_0^1 K(v)\, dv = 0.
\end{aligned}$$

Llavors $\rho_s = 0$, qualsevol que sigui θ. D'altra banda, U i V són estocàsticament dependents, excepte en el cas $\theta = 0$ en què $F(u,v) = u \cdot v$ i hi ha independència estocàstica. Per tant, dues variables aleatòries poden ser dependents i no obstant $\rho_s = 0$.

C.M. Cuadras
Universitat de Barcelona

SOLUCIÓ AL PROBLEMA PROPOSAT AL VOLUM 24 N. 3

PROBLEMA N. 87

Hay $N_1 = 5$ números favorables y $N_2 = 85$ números desfavorables al extraer 5 números de $N = 90$. Si un jugador compra n números, la probabilidad de que k sean favorables es

$$\frac{\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

función de densidad de probabilidad de la ley hipergeométrica. Las condiciones del juego son que un jugador gana si los n números que compra son todos favorables. La probabilidad de ganar es pues

$$p(k) = \frac{\binom{N_1}{n}\binom{N_2}{0}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{N_1}{n}}{\binom{N}{n}}$$

Para $n = 1,2,3,4,5, N_1 = 5, N_2 = 85$ se obtiene

$$p(1) = \frac{\binom{5}{1}}{\binom{90}{1}} = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$$

$$p(2) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{90}{2}} = \frac{4 \cdot 5}{90 \cdot 89} = \frac{2}{801}$$

$$p(3) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{90}{3}} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{90 \cdot 89 \cdot 88} = \frac{1}{11.748}$$

$$p(4) = \frac{\binom{5}{4}}{\binom{90}{4}} = \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87} = \frac{1}{511.038}$$

$$p(5) = \frac{\binom{5}{5}}{\binom{90}{5}} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86} = \frac{1}{43.949.268}$$

Ganar comprando 1 número es relativamente probable, aunque la ganancia esperada es

$$\frac{1}{18}\times 15c - \frac{17}{18}\times c = -\frac{c}{9}$$

siendo c el importe del billete con 1 número. Ganar comprando 2 números es también asequible, pero la ganancia esperada vuelve a ser negativa

$$\frac{2}{801}\times 270d - \frac{799}{801}\times d = -\frac{259d}{801}$$

siendo d el importe del billete con 2 números. Ganar comprando un billete de 3 números, cuyo importe es e, es bastante más difícil, y la ganancia esperada es

$$\frac{1}{11.748}\times 5.500e - \frac{11.747}{11.748}\times e = -\frac{6.247}{11.748}e$$

Así, por la apuesta c (1 billete) los organizadores del sorteo se quedan, por término medio, $c/9$; por la apuesta d (2 billetes) se quedan casi un tercio de d; por la apuesta e (3 billetes) se quedan con más de la mitad de e. Todas estas apuestas son muy desfavorables para el jugador.

Acertar con un billete de 4 ó 5 números es tan poco probable que no sorprende que nadie ganara. Además, la ganancia esperada de los organizadores era el 85% del importe del billete (4 números) y el 97% del importe del billete (5 números). En la práctica, se quedaban la totalidad del importe, pues nadie ganaba comprando un billete de 4 ó 5 números.

C.M. Cuadras
Universitat de Barcelona